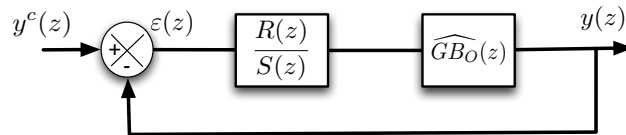


SYNTHÈSE D'UN PID NUMÉRIQUE

T. CHATEAU, POLYTECH CF



Introduction

PID numérique :

- Combine trois actions correctives : proportionnelle, intégrale et dérivée
- Permet de corriger des systèmes d'ordre ≤ 2 avec peu de retard
- Peut se synthétiser à partir d'une structure RST

Du PID analogique vers le PID numérique

$$C_{PID}(p) = K \left(1 + \frac{1}{\tau_i p} + \frac{\tau_d p}{1 + (\tau_d/N)p} \right)$$

avec :

- K : gain proportionnel,
- τ_i : action intégrale,
- τ_d : action dérivée,
- $\frac{\tau_d}{N}$: filtrage de l'action dérivée

$$C_{PID}(p) = K \left(1 + \frac{1}{\tau_i p} + \frac{\tau_d p}{1 + (\tau_d/N)p} \right)$$

Approximation de l'opérateur dérivée :

$$p \rightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

Approximation de l'opérateur intégral :

$$\frac{1}{p} \rightarrow \frac{T_e}{1 - z^{-1}}$$

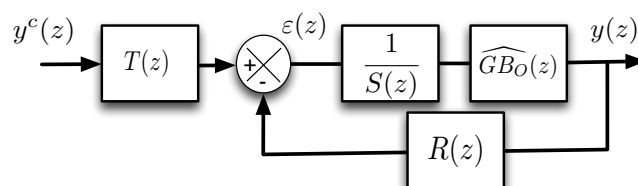
$$C(Z) = K \left[1 + \frac{T_e}{\tau_i} \frac{1}{(1 - z^{-1})} + \frac{\frac{N\tau_d}{\tau_d + NT_e}(1 - z^{-1})}{1 - \frac{\tau_d}{\tau_d + NT_e}z^{-1}} \right]$$

soit,

$$C(z) = \frac{R(z)}{S(z)}$$

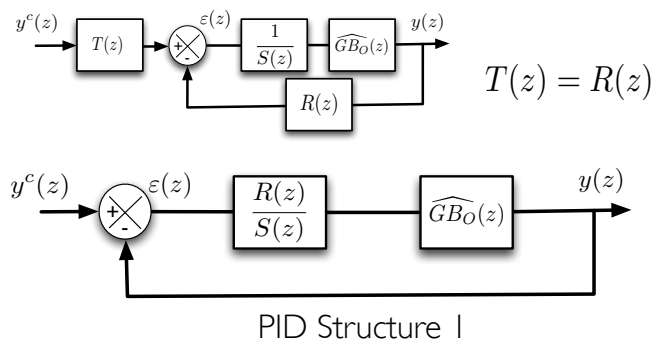
$$S(z) = (1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1})$$

$$R(z) = r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}$$



$$T(z) = R(z)$$

Synthèse d'un PID numérique à partir d'une structure RST



PID Structure I

Synthèse d'un correcteur PID numérique

En trois temps :

- Calcul du modèle à obtenir
- Calcul de l'équation caractéristique (identité de Bezout)
- Identification

Synthèse d'un correcteur PID numérique I/3 : Calcul du modèle à obtenir

$$H_D^+(z) = (1 - Z_1 z^{-1})(1 - Z_1^* z^{-1})$$

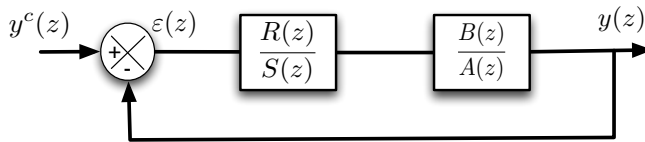
Avec $Z_1, Z_1^* = \exp(-\xi \omega_n T_e \pm j \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n T_e)$

$$H_D^+(z) = 1 - (Z_1 + Z_1^*)z^{-1} + Z_1 Z_1^* z^{-2}$$

$$H_D^+(z) = 1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}$$

Avec
$$\begin{aligned} h_1 &= -(Z_1 + Z_1^*) \\ h_2 &= Z_1 Z_1^* \end{aligned}$$

Synthèse d'un correcteur PID numérique 2/3 : identité de Bezout



$$\frac{y}{y^c} = \frac{BR}{AS + BR} = \frac{H_N}{H_D^+}$$

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots a_n z^{-n}$$

$$B(z) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots b_m z^{-m}$$

Identité de Bezout $AS + BR = H_D^+$

$$(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})(1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1}) + (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})(r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}) = 1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}$$

Synthèse d'un correcteur PID numérique 3/3 : identification

$$1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + A_3 z^{-3} + A_4 z^{-4} = 1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}$$

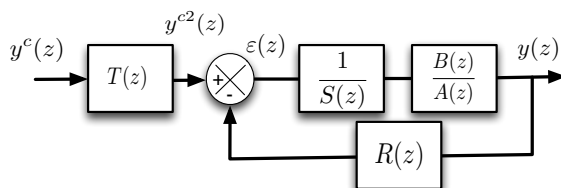
Résolution du système linéaire :

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 + \dots \\ h_2 + \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

PID structure 2



$$T(z) = \frac{H_D^+(1)}{B(1)}$$

Conclusion

PID1

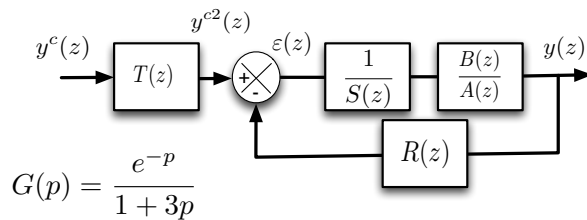
- Robuste aux petites variations de modèle
- Dépassement indiciel modifié par la présence de zéros au numérateur de la FTBF

PID 2 :

- Pas de zéros ajoutés au système
- sensible à la variation gain statique du modèle

Exercice d'application

Correction d'un système d'ordre 1 avec retard.



Calculez la transmittance bloquée $\widehat{GB_0}(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ pour $T_e = 1s$

On veut un dépassement inférieur à 5% et un temps de pic de 4 secondes
Calculez le correcteur PID correspondant (structure 1 et structure 2)