Systèmes linéaires invariants

Thierry CHATEAU

22 octobre 2010

Introduction

- Automatique : commande de systèmes réels
- Génération de commande nécessite de connaître un modèle mathématique du système réel
- Modèle proposé : **Système linéaire stationnaire**

Généralités

- **Système stationnaire** : réponse identique à une même entrée quelquesoit l'instant d'application de l'entrée.
- **Signal causal** : signal définit nul pour $t < 0$.

Système linéaire

- Un système est dit **linéaire** s'il posséde :
  - des propriétés d'homogénéité (proportionnalité des amplitudes),
  - des propriétés d'additivité

$$S(k_1x_1(t) + k_2x_2(t)) = k_1S[x_1(t)] + k_2S[x_2(t)]$$

Réponse impulsionnelle

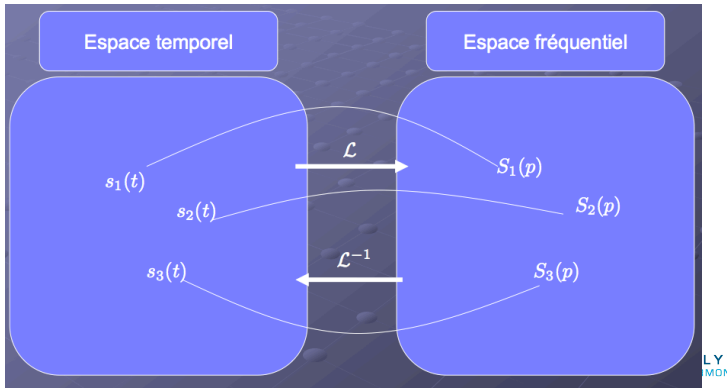
- **Réponse implusionnelle** : réponse à une impulsion de dirac
- **Elle caractérise le comportement d'un système linéaire**
  - Soit $h(t)$, réponse du système S à $\delta(t)$
  - $h(t-\tau) = S[\delta(t-\tau)]$
  - Soit une entrée $x(t)$ quelconque,
  - $y(t) = S[x(t)]$
  - $y(t) = \int_0^\infty x(\tau)h(t-\tau)d\tau$
  - La réponse d'un système à une entrée $x(t)$ est le produit de convolution entre l'entrée et la réponse impulsionnelle du système

Opérateurs utilisés dans le domaine temporel

- **Produit de convolution** : $y(t) = \int_0^\infty x(\tau)h(t-\tau)d\tau$
- **Dérivation** : $s(t) = \dfrac{de(t)}{dt}$
- **Intégration** : $s(t) = \int e(t)dt$
- et bien d'autre (retard, ...)

Utilisation d'un domaine de représentation où ces opérateurs deviennent plus simples

La transformée de Laplace



Calcul de la transformée de Laplace

Transformée de Laplace directe (monolatère) :

$$X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt}dt$$

Transformée de Laplace inverse :

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(p)e^{pt}dp$$

Calcul de la transformée de Laplace

En pratique, utilisation de tables et transformation :

Transformée de Laplace $X(s)$	Fonction du temps $x(t)$, $t > 0$	Transformée en z $X(z)$
1	$\delta(t)$	1
e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
$\frac{1}{s}$	$\Gamma(t) = 1$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$\frac{1}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{k!}t^k$	$\lim_{a\to 0}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial a^k}\left(\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)$
$\frac{1}{\ldots}$	e^{-at}	$\frac{z}{\ldots}$

Propriétés de la transformée de Laplace 1/2

- Linéarité :

$$\mathcal{L}\{af + bg\} = a\,\mathcal{L}\{f\} + b\,\mathcal{L}\{g\}$$

- Produit de convolution

$$\mathcal{L}\{x(t) * y(t)\} = X(p).Y(p)$$

- Dérivation

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = pX(p) - x(0)$$

Propriétés de la transformée de Laplace 2/2

- Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{p\to 0} pX(p)$$

- Théorème d'avance retard

$$\mathcal{L}\{x(t-t_0)\} = X(p)e^{-t_0 p}$$

Calcul de la transformée de Laplace inverse

Décomposition en éléments simples et utilisation des tables de conversion

Exemple

Quel est le signal temporel causal dont la transformée de Laplace est :

$$X(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

Calcul de la transformée de Laplace inverse

Décomposition en éléments simples et utilisation des tables de conversion

Solution

$$G(p) = \frac{A_1}{(p+1)} + \frac{A_2}{(p+2)} + \frac{A_3}{(p+3)}$$

avec $A_1 = 1/2$, $A_2 = -1$ et $A_3 = 1/2$.

$$g(t) = (1/2 - e^{-t} + (1/2)e^{-2t})\Gamma(t)$$

Fonction de transfert $F(p)$

- Réponse du système sous forme temporelle :
- $y(t) = x(t) * h(t)$
- Transformée de Laplace de cette réponse :
- $Y(p) = X(p).H(p)$
- D'où la fonction de transfert du système :
- $H(p) = \dfrac{Y(p)}{X(p)} = F(p)$
- Rq : si $x(t) = \delta(t)$ on retrouve $Y(p) = \mathcal{L}[x(t)].F(p) = F(p)$

Racines et zéros

- $F(p)$ est notée : $F(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$
- Les racines de $N(p) = 0$ sont notées **zéros** de $F(p)$
- Les racines de $D(p) = 0$ sont notées **pôles** de $F(p)$

Notion de stabilité

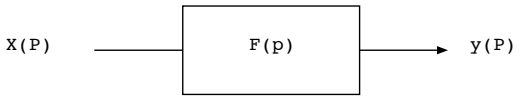
- **Système stable** : $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$
- Un système continu est stable si tous ses pôles sont à partie réelle négative
- Démonstration : décomposition en éléments simples

Passage equation différentielle, fonction de transfert

- Système linéaire mono-entrée, mono-sortie
- $$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+...+a_0 y(t) = b_m\frac{d^m x(t)}{dt^m}+..+b_0 x(t)$$
- En prenant la transformée de Laplace, pour des CI nulles :
- $Y(p)[a_n P^n + a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_0] = X(p)[b_m p^m + ... + b_0]$
- D'où :
$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + ...b_m p^m}{a_0 + a_1 p + ... + a_n p^n}\ ,\ m \leq n$$
- Ordre du système donné par le degré du dénominateur

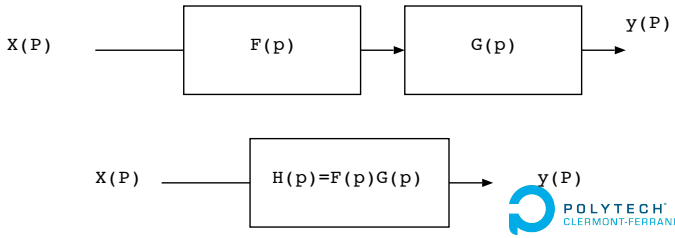
Représentation des systèmes linéaires

- Les systèmes linéaires sont représentés par des blocs

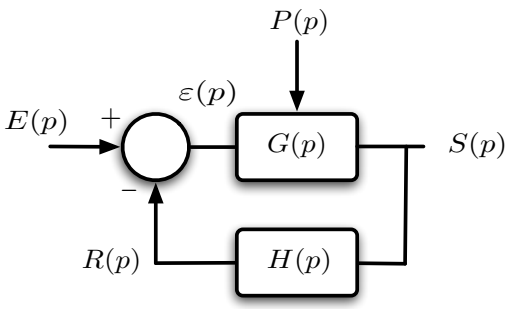


Représentation des systèmes linéaires

- Les blocs peuvent être cascadés



Fonction de transfert d'un système asservi



Fonction de transfert d'un système asservi

Poursuite

La fonction de transfert relative à l'entrée principale régit le comportement en poursuite

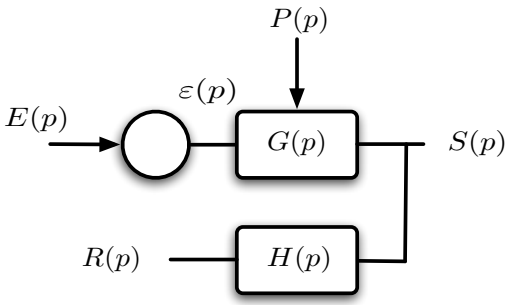
$$F(p) = \frac{S(P)}{E(p)}$$

Régulation

La fonction de transfert relative aux perturbations régit le comportement en régulation

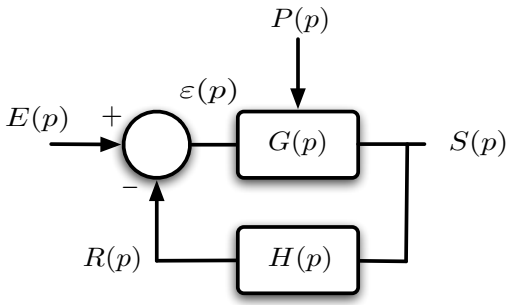
$$F(p) = \frac{S(P)}{P(p)}$$

Fonction de transfert en boucle ouverte ($P(p) = 0$)



$$FTBO(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = G(p).H(p)$$

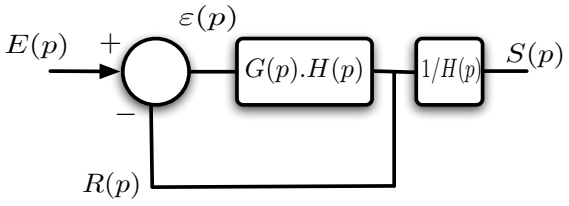
Fonction de transfert en boucle fermée ($P(p) = 0$)



$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p).H(p)}$$

Boucle à retour unitaire

Il est toujours possible de se ramener à un schéma à retour unitaire



Lien boucle ouverte / boucle fermée

Pour un asservissement à retour unitaire

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}$$