Synthèse d'un correcteur aux instants d'échantillonnage

Thierry CHATEAU

17 décembre 2010

Factorisation de $H(z^{-1})$

$H(z^{-1})$ est dite factorisée si on peut l'écrire

- $H = H^+ . H^-$
  - H^+ : terme regroupant les pôles et les zéros stables de H
  - H^- : terme regroupant les pôles et les zéros instables de H
- si $H = H^+$, la transmittance est dite positive

Séparation de $H(z^{-1})$

$H(z^{-1})$ est dite séparée si on peut l'écrire

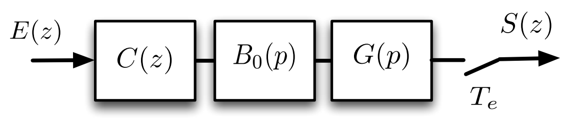
- $H = H_+ + H_-$
  - H_+ : terme regroupant les pôles et les zéros stables de H
  - H_- : terme regroupant les pôles et les zéros instables de H

Représentation de $H(z^{-1})$

$$H = \frac{H_N}{H_D} = \frac{H_N^+ . H_N^-}{H_D^+ . H_D^-} \quad (1)$$

avec $H^+ = \dfrac{H_N^+}{H_D^+}$ et $H^- = \dfrac{H_N^-}{H_D^-}$

Boucle ouverte



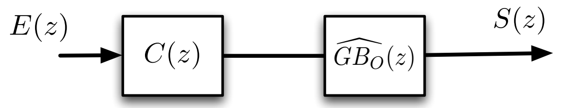


Schéma équivalent aux instants d'échantillonnage

$$H(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{E(z^{-1})} = \frac{H_N(z^{-1})}{H_D^+(z^{-1})}$$

Boucle ouverte

$H(z^{-1}) = \dfrac{H_N(z^{-1})}{H_D^+(z^{-1})}$ est vérifié si :

1. La trasmittance $\widehat{GB}_o(z^{-1})$ est stable :

$$\widehat{GB}_o(z^{-1}) = \frac{GBo_N^+(z^{-1}).GBo_N^-(z^{-1})}{GBo_D^+(z^{-1})} \quad (2)$$

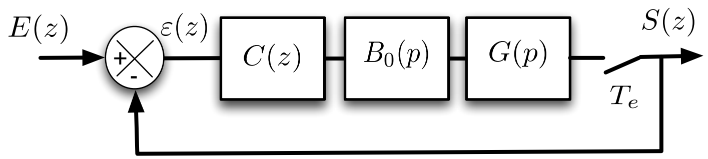
2. Le correcteur est stable et il a pour expression :

$$C(z^{-1}) = \frac{GBo_D^+(z^{-1}).B(z^{-1})}{GBo_N^+(z^{-1}).A(z^{-1})} \quad (3)$$

où $B(z^{-1})$ et $A(z^{-1})$ sont deux polynômes satisfaisants aux équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} GBo_N^-(z^{-1}).B(z^{-1}) = H_N(z^{-1}) \\ A(z^{-1}) = H_D^+(z^{-1}) \end{array} \right. \quad (4)$$

Système bouclé



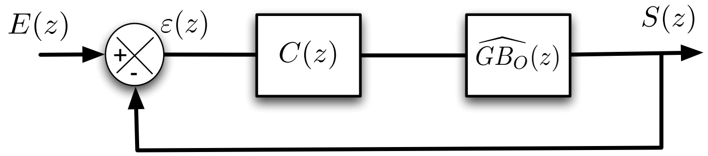


Schéma équivalent aux instants d'échantillonnage

Système bouclé

$$H(z^{-1}) \doteq \frac{Y(z^{-1})}{E(z^{-1})} = \frac{C(z^{-1}).\widehat{GB}_o(z^{-1})}{1+C(z^{-1}).\widehat{GB}_o(z^{-1})} = \frac{H_N(z^{-1})}{H_D^+(z^{-1})}$$

Expression du correcteur

$$C = \frac{\widehat{GB}^+_{oD}.B}{\widehat{GB}^+_{oN}.A}, \tag{5}$$

avec $A(z=0) \neq 0$. $B(z^{-1})$ et $A(z^{-1})$ sont deux polynômes en (z^{-1}), qui possèdent les propriétés suivantes :

1. $B(z^{-1})$ ne contient pas les pôles instables du système $(\widehat{GB}^-_{oD})$,
2. $A(z^{-1})$ ne contient pas les zéros instables du système $(\widehat{GB}^-_{oN})$,
3. $B(z^{-1})$ vérifie la relation :

$$\widehat{GB}^-_{oN}.B = H_N$$

4. A et B vérifient la relation :

$$\widehat{GB}^-_{oN}.B + \widehat{GB}^-_{oD}.A = H_D^+$$

Introduction

Méthode de Zdan (pôles dominants)

Objectif : obtenir un modèle d'ordre 2

- Méthode de correction aux instants d'échantillonnage
- Dynamique du modèle à obtenir calculée à partir d'un cahier des chages
- Ne convient pas à tous les systèmes (retard faible,...)

Modèle à atteindre

Dynamique identique en poursuite et régulation

- Calcul de ξ et ω_n du modèle à partir du cahier des charges
- pôles du modèle :

$$Z_1, Z_1^* = \exp[-\xi\omega_n T_e \pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n.T_e] \tag{6}$$

- d'où le modèle :

$$H_D^+(z^{-1}) = (1-Z_1z^{-1})(1-Z_1^*z^{-1}) = 1-(Z_1+Z_1^*)z^{-1}+Z_1Z_1^*z^{-2} \tag{7}$$

Structure du correcteur

$$C(z^{-1}) = \frac{\widehat{GB}^{+}_{oD}(z^{-1}).B(z^{-1})}{\widehat{GB}^{+}_{oN}(z^{-1}).A(z^{-1})} \quad (8)$$

Le polynôme $B(z^{-1})$ se décompose en deux parties :

$$B(z^{-1}) = K_c.B'(z^{-1})$$

- K_c : gain associé au correcteur et
- $B'(z^{-1})$: polynôme en (z^{-1}).

Le polynôme $A(z^{-1})$ se décompose également en deux parties :

$$A(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^r.A'(z^{-1})$$

- r : nombre d'intégrateurs du correcteur
- $A'(z^{-1})$: polynôme en (z^{-1}).

Calcul des paramètres

$$\widehat{GB}^{-}_{oN}(z^{-1}).B(z^{-1})+\widehat{GB}^{-}_{oD}(z^{-1}).A(z^{-1}) = 1-(Z_1+Z_1^*)z^{-1}+Z_1Z_1^*z^{-2}$$

Relation de degré 2

Enoncé

On souhaite réguler un processus dont la fonction de transfert est donnée par :

$$\widehat{GB}_o(z^{-1}) = \frac{0.26z^{-1}}{1 - 0.74z^{-1}}$$

Les performances du modèle à obtenir sont les suivantes :

1. un dépassement de la réponse indicielle négligeable,
2. un temps de montée de la réponse indicielle $t_m = 0.225s$,
3. une erreur de position nulle (ordre 1) nulle.

La période d'échantillonnage est de $T_e = 0.075ms$

Calcul du modèle

$$H(z^{-1}) = \frac{N_H(z^{-1})}{D_H^{+}(z^{-1})}$$

Recherche de ξ et ω_n :

Amortissement inférieur à 1										
ξ	Paramètres temporels					Paramètres fréquentiels				ξ
	$t_m\omega_n$	$t_r\omega_n$ (5 %)	$t_{pic}\omega_n$	$T_p\omega_n$	D %	$\frac{\omega_R}{\omega_n}$	$\frac{\omega_c}{\omega_n}$	$\frac{\omega_c}{\omega_R}$	M_{dB}	
0,1	1,68	30	3,16	6,31	73	0,99	1,54	1,56	14	0,1
0,15	1,74	20	3,18	6,36	62	0,98	1,53	1,56	10,5	0,15
0,2	1,81	14	3,21	6,41	53	0,96	1,51	1,57	8,1	0,2
0,25	1,88	11	3,24	6,49	44	0,94	1,48	1,59	6,3	0,25
0,3	1,97	10,1	3,29	6,59	37	0,91	1,45	1,61	4,8	0,3
0,35	2,06	7,9	3,35	6,71	31	0,87	1,42	1,63	3,6	0,35
0,4	2,16	7,7	3,43	6,86	25	0,82	1,37	1,67	2,7	0,4
0,45	2,28	5,4	3,52	7,04	21	0,77	1,33	1,72	1,9	0,45
0,5	2,42	5,3	3,63	7,26	16	0,71	1,27	1,80	1,2	0,5
0,55	2,58	5,3	3,76	7,52	12,6	0,63	1,21	1,93	0,7	0,55
0,6	2,77	5,2	3,93	7,85	9,5	0,53	1,15	2,17	0,3	0,6
0,65	3,00	5,0	4,13	8,27	6,8	0,39	1,08	2,74	0,1	0,65
0,7	3,29	3	4,40	8,80	4,6	0,14	1,01	7,14	0	0,7
0,75	3,66	3,1	4,75	9,50	2,84	–	0,94	–	–	0,75

Calcul du modèle

% Exemple zdan
x=0.7
w=3.29/0.225
T=0.075
% calcul des poles
z1=exp(-x*w*T+i*sqrt(1-x*x)*w*T)
a1 = -(z1+z1')
a0=z1*z1'

```
octave> exemple_zdan
x = 0.70000
w = 14.622
T = 0.075000
z1 = 0.32889 + 0.32743i
a1 = -0.65779
a0 = 0.21538
```


Structure du correcteur

$$C(z^{-1}) = K_c \frac{\widehat{GB}^+_{oD}(z^{-1}).B'(z^{-1})}{(1-z^{-1}).\widehat{GB}^+_{oN}(z^{-1}).A'(z^{-1})} = \frac{C_N(z^{-1})}{C_D(z^{-1})},$$

avec :

$$\widehat{GB}^+_{oD}(z^{-1}) = 1 - 0.74z^{-1} \text{ et } \widehat{GB}^+_{oN}(z^{-1}) = 1$$

Ajout d'un intégrateur

Equation caractéristique

$$Eq(z^{-1}) = C_N(z^{-1}).\widehat{GB}_{oN} + C_D(z^{-1}).\widehat{GB}_{oD}(z^{-1})$$

Soit,

$$Eq(z^{-1}) = 0.26.K_c z^{-1} B'(z^{-1}) + (1 - z^{-1})A'(z^{-1})$$

Cette équation caractéristique doit être identifiée avec le dénominateur du modèle :

$$Eq(z^{-1}) = H_D^+ = 1 - 0.658z^{-1} + 0.215z^{-2}$$

l'ordre du polynôme (2) fixe l'ordre les polynômes A' et B' :

$$A'(z^{-1}) = 1 + A_0 z^{-1} \text{ et } B'(z^{-1}) = 1 + B_0 z^{-1}$$

On en déduit l'expression de l'équation caractéristique :

$$Eq(z^{-1}) = 1 + (0.26K_c + A_0 - 1)z^{-1} + (0.26K_c B_0 - A_0)z^{-2}$$

Identification

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 0.26K_c + A_0 - 1 = -0.658 \\ 0.26K_c B_0 - A_0 = 0.215 \end{cases} \quad (9)$$

2 equations et 3 inconnues
Il existe 2 solutions :

- Ajout d'une contrainte pour avoir 3 équations et 3 inconnues
- On peut fixer une inconnue (par exemple $B_0 = 0$)

Si $B_0 = 0$:

$$\begin{cases} 0.26K_c + A_0 - 1 = -0.658 \\ -A_0 = 0.215 \end{cases} \quad (10)$$

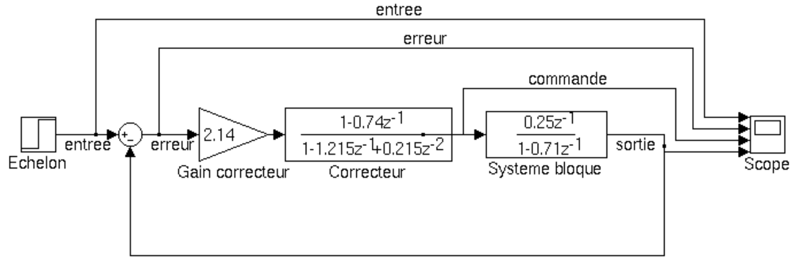
Correcteur

$$A_0 = -0.215 \text{ et } K_c = 2.14$$

L'expression du correcteur est alors :

$$C(z^{-1}) = 2.14 \frac{1 - 0.74z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.215z^{-1})}$$

Correcteur : simulation sous Matlab Simulink



Correcteur : simulation sous Matlab Simulink