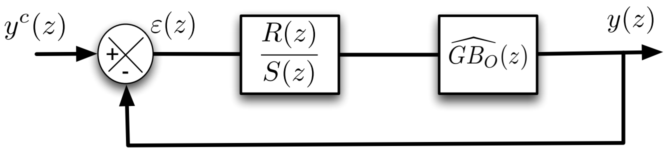
SYNTHÈSE D'UN PID NUMÉRIQUE

T. CHATEAU, POLYTECH CF



Introduction

PID numérique :

- Combine trois actions correctives : proportionnelle, intégrale et dérivée
- Permet de corriger des systèmes d'ordre <= 2 avec peu de retard
- Peut se synthétiser à partir d'une structure RST

Méthode simplifiée de détermination d'un correcteur PID numérique

Relation temporelle d'un PID

$$u(t) = k_p \left(\varepsilon(t) + \frac{1}{\tau_i} \int_0^t \varepsilon(\lambda) d\lambda + \tau_d \frac{d\varepsilon}{dt} \right)$$

Equivalent numérique

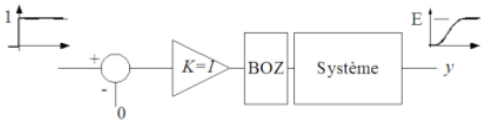
$$u_k = k_p \left(\varepsilon_k + \frac{T_e}{\tau_i} \sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j + \frac{\tau_d}{T_e} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) \right)$$

u_k : signal de commande
ε_k : signal d'erreur

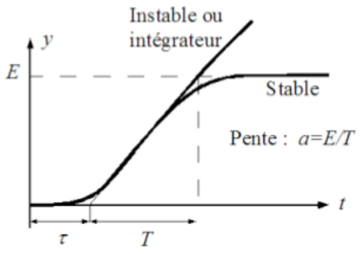
POLYTECH CLERMONT-FERRAND

Méthode simplifiée de détermination d'un correcteur PID numérique

Généralisation du critère de Ziegler-Nichols



En boucle ouverte



POLYTECH CLERMONT-FERRAND

Méthode simplifiée de détermination d'un correcteur PID numérique

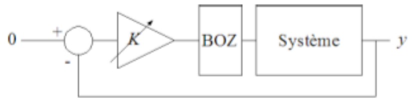
En boucle ouverte

P	$k_p = \frac{1}{a(\tau+T_e)}$
PI	$k_p = \frac{0.9}{a(\tau+0.5T_e)} - 0.5k_iT_e$ $k_i = \frac{0.27}{a(\tau+0.5T_e)^2}$
PID	$k_p = \frac{1.2}{a(\tau+T_e)} - 0.5k_iT_e$ $k_i = \frac{0.6}{a(\tau+0.5T_e)^2}$ $k_d = \frac{0.5}{a}$

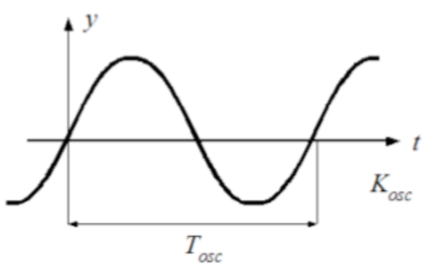
POLYTECH CLERMONT-FERRAND

Méthode simplifiée de détermination d'un correcteur PID numérique

Généralisation du critère de Ziegler-Nichols



En boucle fermée

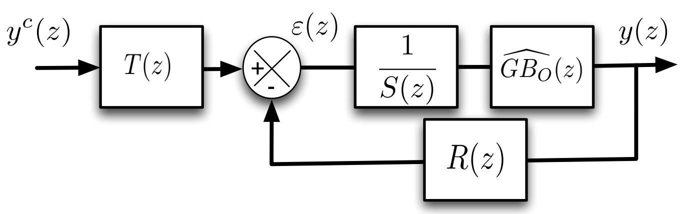


Méthode simplifiée de détermination d'un correcteur PID numérique

En boucle fermée

P	$k_p = 0.5K_{osc}$
PI	$k_p = 0.45K_{osc} - 0.5k_iT_e$ $k_i = 0.54\frac{K_{osc}}{T_{osc}}$
PID	$k_p = 0.6K_{osc} - 0.5k_iT_e$ $k_i = 1.2\frac{K_{osc}}{T_{osc}}$ $k_d = \frac{3}{40}K_{osc}T_{osc}$

Synthèse d'un PID numérique à partir d'une structure RST



Du PID analogique vers le PID numérique

$$C_{PID}(p) = K\left(1 + \frac{1}{\tau_i p} + \frac{\tau_d p}{1 + (\tau_d/N)p}\right)$$

avec :

- K : gain proportionnel,
- τ_i : action intégrale,
- τ_d : action dérivée,
- $\frac{\tau_d}{N}$: filtrage de l'action dérivée

Du PID analogique vers le PID numérique

$$C_{PID}(p) = K\left(1 + \frac{1}{\tau_i p} + \frac{\tau_d p}{1 + (\tau_d/N)p}\right)$$

Approximation de l'opérateur dérivée :

$$p \rightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

Approximation de l'opérateur intégral :

$$\frac{1}{p} \rightarrow \frac{T_e}{1 - z^{-1}}$$

Formulation générale du PID numérique

$$C(Z) = K\left[1 + \frac{T_e}{\tau_i}\frac{1}{(1 - z^{-1})} + \frac{\frac{N\tau_d}{\tau_d + NT_e}(1 - z^{-1})}{1 - \frac{\tau_d}{\tau_d + NT_e}z^{-1}}\right]$$

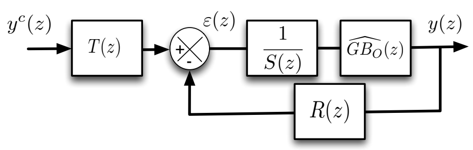
soit,

$$C(z) = \frac{R(z)}{S(z)}$$

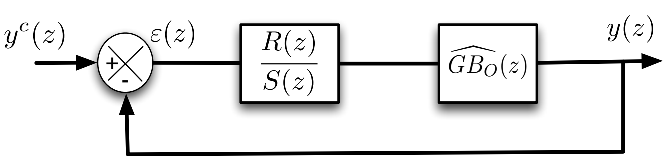
$$S(z) = (1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1})$$

$$R(z) = r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}$$

Synthèse d'un PID numérique à partir d'une structure RST



$$T(z) = R(z)$$



PID Structure I

Synthèse d'un correcteur PID numérique

En trois temps :

- Calcul du modèle à obtenir
- Calcul de l'équation caractéristique (identité de Bezout)
- Identification

Synthèse d'un correcteur PID numérique
1/3 : Calcul du modèle à obtenir

$$H_D^+(z) = (1 - Z_1 z^{-1})(1 - Z_1^* z^{-1})$$

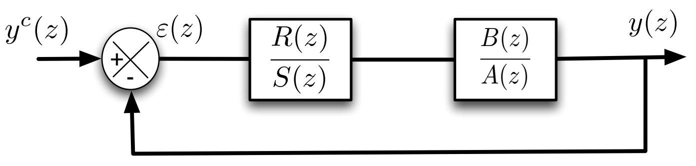
Avec $Z_1, Z_1^* = \exp(-\xi \omega_n Te \pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n T_e)$

$$H_D^+(z) = 1 - (Z_1 + Z_1^*) z^{-1} + Z_1 Z_1^* z^{-2}$$

$$H_D^+(z) = 1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}$$

Avec
$$h_1 = -(Z_1 + Z_1^*)$$
$$h_2 = Z_1 Z_1^*$$

Synthèse d'un correcteur PID numérique
2/3 : identité de Bezout



$$\frac{y}{y^c} = \frac{BR}{AS + BR} = \frac{H_N}{H_D^+}$$

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots a_n z^{-n}$$

$$B(z) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots b_m z^{-m}$$

Identité de Bezout $\quad AS + BR = H_D^+$

$$(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})(1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1}) + (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})(r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}) = 1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}$$

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

Synthèse d'un correcteur PID numérique 3/3 : identification

$$1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + A_3 z^{-3} + A_4 z^{-4} = 1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}$$

Résolution du système linéaire :

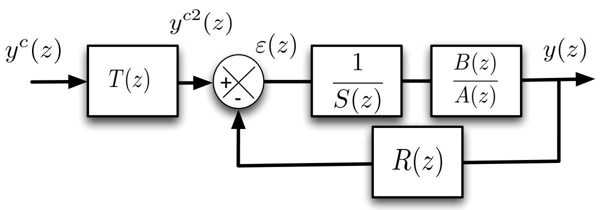
$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 + ... \\ h_2 + ... \\ .. \\ .. \end{pmatrix}$$

$$\mathtt{AX} = \mathtt{B}$$

$$\mathtt{X} = \mathtt{A}^{-1}\mathtt{B}$$

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

PID structure 2



$$T(z) = \frac{H_D^+(1)}{B(1)}$$

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

Conclusion

PID I

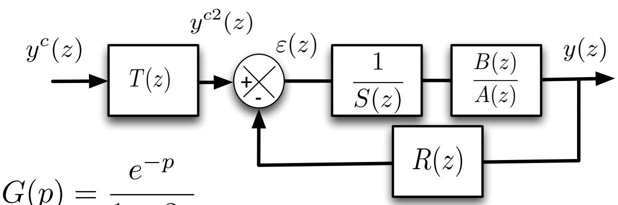
- Robuste aux petites variations de modèle
- Dépassement indiciel modifié par la présence de zéros au numérateur de la FTBF

PID 2 :

- Pas de zéros ajoutés au système
- sensible à la variation gain statique du modèle

Exercice d'application

Correction d'un système d'ordre 1 avec retard.



$$G(p) = \frac{e^{-p}}{1+3p}$$

Calculez la transmittance bloquée $\widehat{GB_0}(z) = \dfrac{B(z)}{A(z)}$ pour $T_e = 1s$

On veut un dépassement inférieur à 5% et un temps de pic de 4 secondes

Calculez le correcteur PID correspondant (structure 1 et structure 2)