



**POLYTECH**<sup>®</sup>  
CLERMONT-FERRAND

## CONTRÔLE ET RÉGULATION DES SYSTÈMES LINÉAIRES

**L. Adouane et T. Chateau**

**2011-2012**

# Avant-propos

Ce document regroupe un ensemble de notes de cours compilées lors des dix dernières années. Il accompagne le cours d'automatique linéaire dispensé aux étudiants de Génie Electrique, Génie Physique, et de formation continue de Polytech Clermont-Ferrand.

Le contenu de ce document n'est absolument pas exhaustif et doit être complété des notes personnelles prises lors des séances de cours, des travaux dirigés et des travaux pratiques.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Etude des systèmes linéaires continus à temps invariant</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction . . . . .	2
1.2	Etude des systèmes classiques . . . . .	3
1.3	Etude temporelle des systèmes linéaires . . . . .	3
1.3.1	Signaux tests usuellement utilisés . . . . .	3
1.3.2	Systèmes d'ordre un . . . . .	5
1.3.3	Systèmes d'ordre deux . . . . .	8
1.4	Etude hamonique des systèmes linéaires . . . . .	14
1.4.1	Différentes représentations issues de l'étude harmonique des systèmes linéaires continus	15
1.4.2	La forme générale du gain et du déphasage d'un système continu . . . . .	15
1.4.3	Le diagramme de Bode asymptotique . . . . .	17
1.5	Conclusion . . . . .	19
1.6	La stabilité des systèmes continus . . . . .	21
1.6.1	Définition générale . . . . .	21
1.6.2	Stabilité d'un système asservi . . . . .	22
1.6.3	Critère simplifié : critère du revers . . . . .	22
1.6.4	Critère d'application général . . . . .	22
1.6.5	Critère de Nyquist . . . . .	25
1.6.6	Notion de robustesse de la stabilité . . . . .	25
1.7	Précision des systèmes asservis . . . . .	27
1.7.1	Précision dynamique d'un système du premier ordre à retour unitaire . . . . .	27
1.7.2	Précision dynamique d'un système du second ordre à retour unitaire . . . . .	29
1.7.3	Précision statique . . . . .	30
1.7.4	Conclusion . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Correction des systèmes linéaires continus à temps invariant</b>	<b>33</b>
2.1	Problématique . . . . .	35
2.2	Notion de réglabilité . . . . .	36
2.3	Correcteurs classiques . . . . .	36
2.3.1	Résumé des objectifs . . . . .	36
2.3.2	Définition des actions proportionnelle, intégrale et dérivée . . . . .	37
2.3.3	Régulateur à action proportionnelle . . . . .	37
2.3.4	Correcteur proportionnel dérivé . . . . .	37
2.3.5	Correcteur à avance de phase . . . . .	38
2.3.6	Correcteur à action proportionnelle et intégrale . . . . .	38
2.3.7	Correcteur à retard de phase . . . . .	39
2.3.8	Le correcteur à action proportionnelle, intégrale et dérivée . . . . .	39

<b>3</b>	<b>Etude des systèmes linéaires échantillonnés</b>	<b>43</b>
3.1	Introduction . . . . .	45
3.2	Rappels sur les signaux à temps discret . . . . .	45
3.2.1	Description des signaux . . . . .	46
3.2.2	Signaux fondamentaux . . . . .	46
3.2.3	Outil mathématique pour les signaux discrets : la transformée en $Z$ . . . . .	47
3.2.4	propriétés de la transformée en $Z$ . . . . .	47
3.2.5	Fonction inverse $TZ^{-1}$ . . . . .	49
3.2.6	Equations récurrentes $\Leftrightarrow TZ$ . . . . .	49
3.3	Fonction de transfert, stabilité et performances . . . . .	49
3.3.1	Fonction de transfert d'un processus muni d'un bloqueur d'ordre zéro ( $B_0Z$ ) . . . . .	49
3.3.2	Transformée en $Z$ modifiée (étendue) . . . . .	50
3.3.3	Stabilité des systèmes dans le plan $Z$ . . . . .	50
3.3.4	Critère de Jury . . . . .	50
3.3.5	Forme standard de $F(z)$ . . . . .	51
3.3.6	Précision . . . . .	51
3.3.7	La cadence d'échantillonnage . . . . .	51
3.4	Modèle numérique du second ordre . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Correction des systèmes linéaires échantillonnés</b>	<b>53</b>
4.1	Introduction . . . . .	55
4.2	Généralités . . . . .	55
4.2.1	Factorisation et séparation d'une transmittance . . . . .	55
4.2.2	Structure en cascade (boucle ouverte) . . . . .	55
4.2.3	Système bouclé . . . . .	56
4.3	Synthèse de correcteurs numériques par la méthode des pôles dominants . . . . .	57
4.3.1	Introduction . . . . .	57
4.3.2	Description de la méthode . . . . .	57
4.3.3	Exemple . . . . .	59
4.4	La structure générale des correcteurs numériques (structure RST) . . . . .	61
4.4.1	Introduction . . . . .	61
4.4.2	Etude générale de la structure . . . . .	61
4.5	Correcteurs de types PID numériques. . . . .	62
4.5.1	Approximation des actions dérivée et intégrale . . . . .	63
4.5.2	Structure du PID numérique . . . . .	64
4.5.3	Etude du correcteur en régulation . . . . .	65
4.5.4	Etude du correcteur en poursuite . . . . .	66
4.5.5	Exemple de calcul d'un PID numérique . . . . .	67
4.5.6	Programmation de la synthèse d'un correcteur Pid numérique sous Matlab . . . . .	70
4.5.7	Conclusion . . . . .	70
4.6	Correcteurs de type placement de pôles . . . . .	72
4.6.1	Etude en régulation . . . . .	72
4.6.2	Etude en poursuite . . . . .	73
4.6.3	Compensation des zéros stables . . . . .	74
<b>A</b>	<b>Tables de transformées</b>	<b>77</b>
<b>B</b>	<b>Système d'ordre deux</b>	<b>89</b>

<b>C</b>	<b>Les nombres complexes</b>	<b>93</b>
C.1	introduction . . . . .	95
C.2	Notation des nombres complexes . . . . .	95
C.2.1	Représentation cartésienne . . . . .	95
C.2.2	représentation polaire . . . . .	95
<b>D</b>	<b>Quelques commandes matlab</b>	<b>97</b>



# Table des figures

1.1	synoptique illustrant l'analyse temporelle . . . . .	3
1.2	Principaux signaux tests . . . . .	4
1.3	fonction de dirac . . . . .	5
1.4	Réponse impulsionnelle d'un système d'ordre . . . . .	6
1.5	Réponse indicielle d'un système d'ordre . . . . .	8
1.6	Réponse à une rampe d'un système d'ordre . . . . .	9
1.7	Réponse impulsionnelle d'un système d'ordre deux . . . . .	11
1.8	Réponse indicielle d'un système d'ordre deux . . . . .	13
1.9	Mesures graphiques sur la réponse indicielle d'un système d'ordre deux . . . . .	13
1.10	Abaques utilisées dans la définition d'un modèle d'ordre deux . . . . .	14
1.11	Principe de l'étude harmonique . . . . .	14
1.12	Exemple de diagramme de Bode et lieu de Black d'un système d'ordre un. . . . .	16
1.13	Exemple de diagramme de Bode et lieu de Black d'un système d'ordre deux. . . . .	16
1.14	Exemple de diagramme de Bode asymptotique d'un système d'ordre un. . . . .	18
1.15	Exemple de diagramme de Bode asymptotique d'un système d'ordre deux. . . . .	19
1.16	plan de Laplace . . . . .	21
1.17	Système à retour unitaire . . . . .	22
1.18	Critère du revers . . . . .	23
1.19	Marges de Gain et de phase . . . . .	26
2.1	Place du correcteur dans la boucle de commande . . . . .	35
2.2	Notion de réglabilité . . . . .	36
2.3	Action proportionnelle . . . . .	38
2.4	Action proportionnelle et dérivée . . . . .	39
2.5	Correcteur à avance de phase . . . . .	40
2.6	Correcteur proportionnel intégral . . . . .	41
2.7	Correcteur à retard de phase . . . . .	42
2.8	Schéma d'un correcteur PID . . . . .	42
3.1	Exemples de systèmes numériques . . . . .	45
3.2	Echelon unitaire $\Gamma_n$ . . . . .	46
3.3	Impulsion unitaire $\delta_n$ . . . . .	47
3.4	Illustration du théorème d'avance retard . . . . .	48
4.1	Structure en boucle ouverte . . . . .	56
4.2	Structure en boucle fermée . . . . .	57
4.3	Schéma de simulation Matlab Simulink du système corrigé . . . . .	61
4.4	Réponse à un échelon du système corrigé. Cette réponse a été calculée à l'aide du module Simulink de Matlab. . . . .	62
4.5	Schéma général d'une structure RST . . . . .	63
4.6	Calcul numérique d'une dérivée . . . . .	63
4.7	correcteur PID en régulation . . . . .	65

4.8	correcteur PID en poursuite . . . . .	66
4.9	correcteur PID structure 1 . . . . .	66
4.10	Comportement d'un PID1 . . . . .	69
4.11	Comportement d'un PID2 . . . . .	70
4.12	Correcteur de type placement de pôles en régulation . . . . .	73
4.13	Correcteur de type placement de pôles en régulation . . . . .	74
4.14	Correcteur de type placement de pôles . . . . .	75
4.15	Correcteur de type placement de pôles avec compensation des zéros . . . . .	76
A.1	/9 . . . . .	79
A.2	/9 . . . . .	80
A.3	/9 . . . . .	81
A.4	/9 . . . . .	82
A.5	/9 . . . . .	83
A.6	/9 . . . . .	84
A.7	/9 . . . . .	85
A.8	/9 . . . . .	86
A.9	/9 . . . . .	87

# Liste des tableaux

1.1	Caractéristiques d'un système linéaire d'ordre deux . . . . .	12
1.2	Tableau des valeurs numériques d'un système d'ordre deux . . . . .	15
1.3	Etude asymptotique d'un terme d'ordre un . . . . .	18
1.4	Etude asymptotique d'un terme d'ordre deux . . . . .	19
4.1	Tableau des valeurs numériques d'un système d'ordre deux . . . . .	60
4.2	Code Matlab de calcul d'un PID1 . . . . .	71



---

# ÉTUDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS À TEMPS INVARIANT

---

L'automatique consiste à modifier le comportement de systèmes physiques en fonction de contraintes de fonctionnement fixées par un cahier des charge. Cette modification s'effectue en ajoutant des blocs électroniques, appelés correcteurs. La synthèse de

ces correcteurs passe par une modélisation du système physique. Ce Chapitre présente le modèle de système le plus simple et le plus couramment utilisé : les systèmes linéaires continus à temps invariant.

---

## 1.1 Introduction

Les modèles linéaires continus à temps invariants sont très populaires en automatiques. Ce sont des objets mathématiques très simple à mettre en oeuvre et à manipuler. D'autre part, ils permettent d'approximer de manière assez précise des système physiques réels.

Cette partie propose une étude temporelle et fréquentielle des modèles linéaires continus à temps invariant. Tout système linéaire continu à temps invariant est peut être décomposé est une combinaison de modèles simples appelés systèmes classiques. L'étude de ces systèmes classiques (d'ordre un et deux) est donc un passage obligé dans le processus de synthèse d'un système linéaire quelconque.

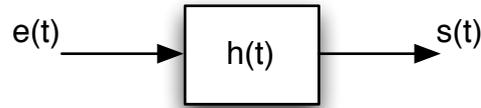


FIGURE 1.1 – L’analyse temporelle d’un système s’effectue en appliquant un signal test  $e(t)$  à l’entrée du système (modélisé par sa réponse impulsionnelle  $h(t)$ ) et en observant l’évolution temporelle du signal de sortie du système  $s(t)$ .

## 1.2 Etude des systèmes classiques

Cette section aborde l’étude des systèmes les plus souvent utilisés en automatique linéaire : les systèmes d’ordre un et deux. De nombreux phénomènes physiques peuvent être assimilés (autour d’un point de fonctionnement) à des comportements de ce type :

- ▷ Télécommunications,
- ▷ astronomie,
- ▷ radar,
- ▷ contrôle industriel,
- ▷ économie,
- ▷ géologie,
- ▷ médecine...

D’autre part, Il est possible d’exprimer n’importe quel système linéaire à partir d’une décomposition en sous-modèles d’ordre un et deux.

Il est possible d’étudier un modèle dans le domaine temporel ou fréquentiel. L’étude temporelle offre une interprétation direct des grandeurs physiques liées à la stabilité (dépassement) ou à la précision (Gain) du système, tandis que l’étude fréquentielle fournit un modèle mathématique plus facilement manipulable en vue d’une synthèse de correcteur. Nous présentons, dans une première partie de cette section, l’étude temporelle des systèmes classiques, puis leur étude fréquentielle dans une deuxième partie.

## 1.3 Etude temporelle des systèmes linéaires

Tout système linéaire peut être caractérisé par sa réponse à une impulsion de Dirac. Or, d’un point de vue pratique, il est impossible de réaliser ce test, l’impulsion de Dirac n’étant pas définie pas une fonction mais par une distribution. Par contre, il est possible de caractériser un système en analysant sa réponse temporelle devant un signal test connu. La figure 1.1 définit les notations employées pour les signaux d’entrée ( $e(t)$ ), de sortie ( $s(t)$ ), et le modèle du système représenté par sa réponse impulsionnelle ( $h(t)$ ).

Tout système linéaire peut être décomposé en une combinaison de sous-systèmes simples, d’ordre un ou deux. Cette section est une étude du comportement temporel des ces systèmes, à partir de laquelle il est possible d’analyser le comportement temporel de tout système d’ordre plus élevé.

### 1.3.1 Signaux tests usuellement utilisés

L’étude d’un système linéaire consiste à analyser le comportement de la sortie du système devant une entrée excitée par un signal test connu. La réponse du système à une impulsion de Dirac fournit directement la fonction

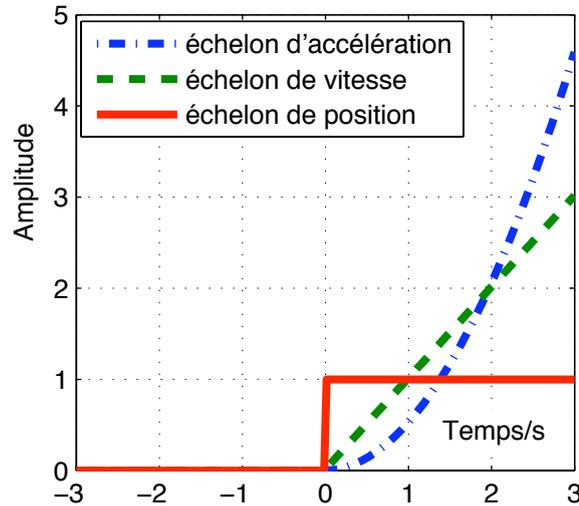


FIGURE 1.2 – représentation des trois principaux signaux test utilisés lors de l'étude temporelle des systèmes linéaires.

de transfert de ce dernier. Néanmoins, en pratique, il est impossible de réaliser un dispositif expérimental capable de générer une impulsion de Dirac.

On introduit donc de nouveaux signaux tests, sous la forme des fonctions temporelles, définies par leur ordre ( $n$ ), et dont l'expression générale s'écrit :

$$e_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \Gamma(t) \quad (1.1)$$

Soit, dans le plan de Laplace

$$E_n(p) = \frac{1}{p^n} \quad (1.2)$$

A partir de cette formulation, on déduit les trois signaux les plus souvent utilisés lors des expérimentations :

$$\begin{aligned} \text{Ordre 1} &\rightarrow n = 1 & e_1(t) = \Gamma(t) & E_1(p) = \frac{1}{p} & \text{[ échelon de position ]} \\ \text{Ordre 2} &\rightarrow n = 2 & e_2(t) = t & E_2(p) = \frac{1}{p^2} & \text{[ échelon de rampe ]} \\ \text{Ordre 3} &\rightarrow n = 3 & e_3(t) = \frac{t^2}{2} & E_3(p) = \frac{1}{p^3} & \text{[ échelon d'accélération ]} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Le calcul d'un signal test s'opère simplement en intégrant le signal d'ordre immédiatement inférieur. La figure 1.2 représente l'évolution temporelle des échelons de position, rampe et accélération.

Un quatrième signal s'ajoute souvent à ces trois signaux tests. Il s'agit de l'impulsion de Dirac, notée  $\delta(t)$ . Cette fonction, introduite par Paul Dirac, peut être informellement considérée comme une fonction qui prend une « valeur » infinie en 0, et la valeur zéro partout ailleurs, et dont l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  est égale à 1. D'un point de vue pratique, on peut l'approximer par un signal carré, centré en zéro, de largeur  $\epsilon$  et de hauteur  $\frac{1}{\epsilon}$ , lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ ; comme l'illustre la figure 1.3.

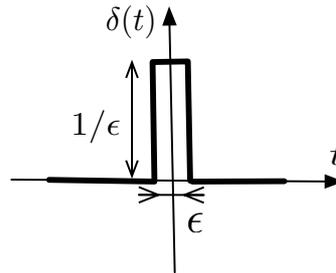


FIGURE 1.3 – Approximation de la «fonction de dirac» (en réalité définie par une distribution) par un signal carré centré en zéro, de largeur  $\epsilon$  et de hauteur  $\frac{1}{\epsilon}$ , lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

### 1.3.2 Systèmes d'ordre un

Les systèmes d'ordre un sont définis par un modèle linéaire qui suit une équation différentielle du premier ordre :

$$\tau \frac{ds}{dt} + s(t) = K e(t) \quad (1.4)$$

L'équation différentielle précédente s'écrit également, en utilisant la transformé de Laplace :

$$\tau p S(p) + S(p) = K E(p) \quad (1.5)$$

En exprimant cette equation sous la forme du rapport du signal de sortie sur le signal d'entrée, on obtient l'expression classique de la fonction de transfert d'un système d'ordre un :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p} \quad (1.6)$$

La représentation paramétrique précédente d'un système d'ordre un est totalement définie à partir de deux paramètres :

- ▷  $\tau$  : la constante de temps du système
- ▷  $K$  : le gain statique du système.

L'identification du modèle du système d'ordre un s'effectue en estimant la valeur de ces deux paramètres. Cette estimation peut s'extraire de l'analyse de la réponse temporelle du système.

#### Réponse impulsionnelle

L'entrée du système est définie par le signal temporel  $e(t) = \delta(t)$ . La transformée de Laplace de l'entrée est alors  $E(p) = 1$ . L'expression de la sortie (en Laplace) du système est alors :

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad (1.7)$$

L'expression analytique de l'évolution temporelle de la sortie se déduit en calculant la transformée de Laplace inverse de  $S(p)$ . La manière la plus simple d'effectuer ce calcul et d'utiliser les tables de transformation données en annexe D page 97 :

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}(S(p)) \quad (1.8)$$

$$s(t) = \frac{K}{\tau} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \right) \quad (1.9)$$

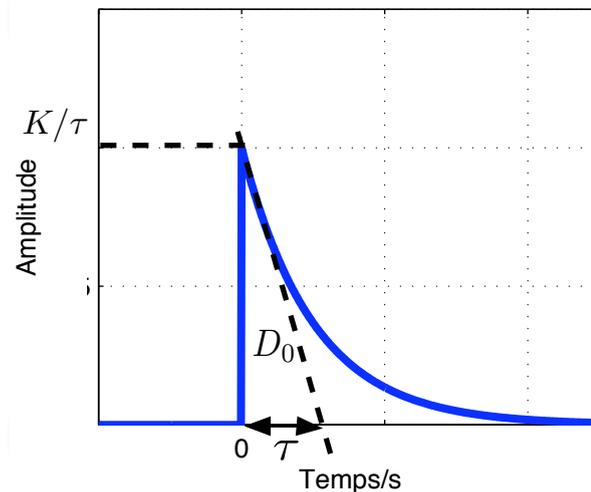


FIGURE 1.4 – Réponse impulsionnelle d'un système d'ordre un. Il est possible de remonter aux deux paramètres du système à partir 1) de l'intersection de la pente de la réponse à l'origine avec l'axe des abscisses, et 2) de la valeur du signal de sortie à l'origine.

Finalement,

$$s(t) = \frac{K}{\tau} \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right] \quad (1.10)$$

La figure 1.4 montre la forme de  $s(t)$ . l'impulsion est «absorbée par le système» de manière exponentielle.

L'équation de  $s(t)$  fait apparaître les deux paramètres du système. Pour  $t = 0^+$ , la sortie vaut  $\frac{K}{\tau}$ . D'autre part, la dérivée de  $s(t)$  s'écrit :

$$s'(t) = -\frac{K}{\tau^2} \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right] \quad (1.11)$$

On en déduit l'équation de la tangente  $D_0$  de  $s(t)$  à l'origine :

$$T_0 : s = -\frac{K}{\tau^2}t + \frac{K}{\tau} \quad (1.12)$$

Cette droite s'annule (coupe l'axe des abscisses) pour  $t = \tau$ . L'identification graphique d'un système d'ordre un, à partir de sa réponse indicielle s'effectue donc en deux étapes :

1. la constante de temps  $\tau$  est mesurée à partir du temps relevé à l'intersection entre la tangente de la sortie à l'origine et l'axe des abscisses ;
2. le gain statique  $K$  est déduit de la mesure de la valeur de la sortie à l'origine  $s(0)$  par la relation  $s(0) = \frac{K}{\tau}$ .

Bien que la réponse impulsionnelle d'un système d'ordre un permet une détermination graphique simple de ses deux paramètres, elle n'est jamais utilisée en pratique car la génération expérimentale d'une entrée impulsionnelle n'est pas possible.

### Réponse indicielle

Le relevé de l'évolution temporelle de la sortie d'un système linéaire continu, devant une entrée de type échelon constitue une des expérimentations les plus courante. L'étude de la réponse indicielle ainsi obtenue permet de

déterminer rapidement les deux paramètres du système. De plus, la génération expérimentale d'un échelon est très simple à réaliser.

L'entrée du système est définie par le signal temporel  $e(t) = e_1(t)$  (parfois aussi noté  $\Gamma(t)$ ). La transformée de Laplace de l'entrée est alors  $E_1(p) = \frac{1}{p}$ . L'expression de la sortie (en Laplace) du système est alors :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{1}{p} \frac{K}{1 + \tau p} \quad (1.13)$$

L'expression analytique de l'évolution temporelle de la sortie se déduit en calculant la transformée de Laplace inverse de  $S(p)$ . L'utilisation des tables de transformation permet de calculer rapidement cette expression :

$$s(t) = K \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right] \right\} \quad (1.14)$$

La figure 1.5 montre un exemple d'évolution temporelle de la réponse indicielle d'un système d'ordre un. L'identification de la constante de temps et du gain statique du système s'effectue de manière simple, à partir de mesures graphiques sur cette courbe :

- ▷ le gain statique s'obtient par le rapport de la variation du signal de sortie par la variation du signal d'entrée :

$$K = \frac{\Delta_s}{\Delta_e} \quad (1.15)$$

- ▷ la constante de temps  $\tau$  peut se mesurer de deux manières différentes :

1. la dérivée du signal de sortie s'exprime :

$$s'(t) = \frac{K}{\tau} \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right] \quad (1.16)$$

On en déduit l'équation de la tangente  $D_0$  de  $s(t)$  à l'origine :

$$T_0 : s = \frac{K}{\tau} t \quad (1.17)$$

Cette droite coupe l'asymptote du signal temporel ( $s_\infty = K$ ) pour  $t = \tau$ . La valeur de  $\tau$  se mesure donc à l'intersection de la tangente du signal à l'origine avec la droite d'équation  $y = s_\infty$ .

2. Pour  $t = 1$ ,  $s(1) = K(1 - e^{-1}) \approx 0.63K$ . La valeur de  $\tau$  se détermine alors pour une variation de la sortie de 63% de sa variation totale.

**Remarque** : Dans la pratique, la détermination des paramètres du modèle s'effectue autour d'un point de fonctionnement du système. Il est donc rare d'identifier un système réel à partir d'un essai à un échelon d'amplitude unitaire et dont la valeur initiale est zéro. C'est pour cette raison que dans les explications précédentes, le terme variation a été utilisé.

### Réponse à une rampe

La réponse à une rampe consiste à relever l'évolution temporelle d'un système devant un signal causal d'équation  $e_2(t) = t$ . La transformée de Laplace de l'entrée est alors  $E_2(p) = \frac{1}{p^2}$ . L'expression de la sortie (en Laplace) du système est alors :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{1}{p^2} \frac{K}{1 + \tau p} \quad (1.18)$$

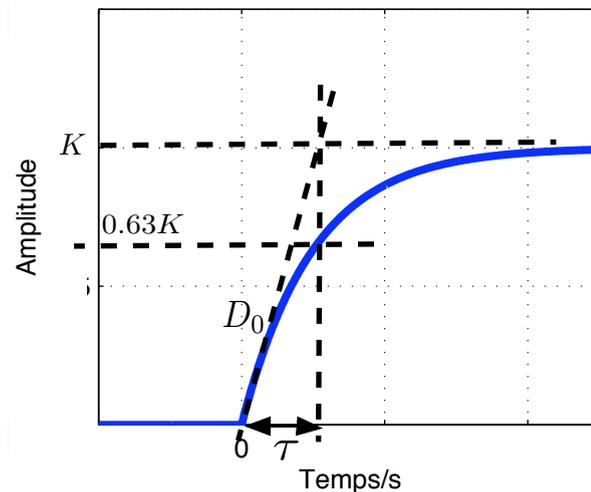


FIGURE 1.5 – Réponse indicielle d'un système d'ordre un. Il est possible de remonter aux deux paramètres du système à partir 1) du rapport de la variation de la sortie sur la variation de l'entrée, et 2) du temps mesuré à l'intersection de la tangente du signal à l'origine avec la droite d'équation  $y = s_{\infty}$ .

L'expression analytique de l'évolution temporelle de la sortie se déduit en calculant la transformée de Laplace inverse de  $S(p)$  :

$$S(p) = K \left( \frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau}{p + 1/\tau} \right) \quad (1.19)$$

$$\text{D'où } s(t) = K(t - \tau + \tau \cdot e^{-t/\tau}) \quad (1.20)$$

### Cas de l'intégrateur pur $\frac{1}{p}$

L'intégrateur pur, système qui produit, en sortie, un signal intégral du signal d'entrée, est un système d'ordre un, dont l'équation est :

$$s(t) = \int_0^t e(t) dt \quad (1.21)$$

L'équation précédente s'exprime, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{1}{p} E(p) \quad (1.22)$$

On peut en déduire très facilement la réponse d'un système intégrateur aux différents signaux tests : la réponse d'une impulsion de Dirac est un échelon, la réponse d'un échelon est une rampe de vitesse, la réponse d'une rampe de vitesse est une rampe d'accélération, ...

### 1.3.3 Systèmes d'ordre deux

Lorsqu'un système linéaire à temps invariant est régi par une équation différentielle du second ordre, il est modélisé par un système d'ordre deux :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = k\omega_0^2 u \quad (1.23)$$

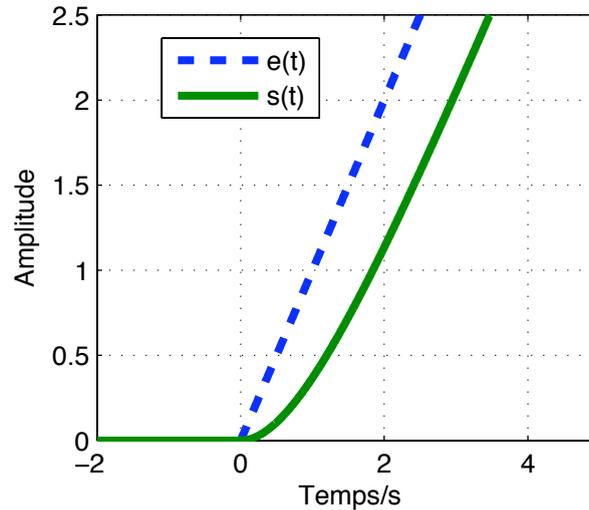


FIGURE 1.6 – Réponse à une rampe d'un système d'ordre un. .

Avec des conditions initiales nulles, cette équation temporelle s'exprime dans le domaine de Laplace, sous la forme canonique suivante :

$$G(p) = \frac{K}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad (1.24)$$

Il existe une très grande variété de processus physiques (mécanique, thermique, thermodynamique, électrique) dont le fonctionnement obéit à de telles équations. L'équation précédente comporte trois paramètres :

1. le gain statique  $K$ ,
2. le coefficient d'amortissement  $\xi$ ,
3. la pulsation propre non amortie (ou pulsation naturelle) $\omega_0^1$  ;

Cette fonction de transfert comporte deux pôles, et peut donc s'écrire, en factorisant, de la manière suivante :

$$G(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)} \quad (1.25)$$

avec  $p_1, p_2 \in \mathbb{C}$ , les pôles du système. L'étude des différentes formes d'un système d'ordre deux s'effectue en analysant les racines de son équation caractéristique, donnée par le dénominateur de la fonction de transfert :

$$p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2 = 0 \quad (1.26)$$

Cette équation d'ordre deux admet deux racines dont l'expression est :

$$p_1, p_1^* = -\xi\omega_0 \pm j\sqrt{(1 - \xi^2)}\omega_0 \quad (1.27)$$

La nature de ces racines dépend du signe du déterminant<sup>2</sup> du polynôme :

$$\Delta' = \omega_0^2(\xi^2 - 1) \quad (1.28)$$

Trois cas de figure se présentent :

<sup>1</sup>On trouve également la notation  $\omega_n$

<sup>2</sup>Dans ce cas, on utilise le déterminant réduit

1.  $\xi > 1$  : l'équation caractéristique admet deux racines réelles,
2.  $\xi = 1$  : l'équation caractéristique admet une racine réelle double,
3.  $\xi < 1$  : l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées.

**Remarque** : Dans le cas où  $\xi > 1$  ou  $\xi = 1$ , le système s'écrit comme la mise en cascade de deux systèmes d'ordre 1 :

$$G(p) = K\omega_0^2 \frac{1/p_1}{\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)} \frac{1/p_2}{\left(1 - \frac{p}{p_2}\right)}$$

avec  $p_1 = p_2$  si  $\xi = 1$ . L'étude de ces deux cas s'effectue à partir de systèmes d'ordre 1.

Dans la suite de ce manuscrit, le terme système d'ordre deux sera principalement employé pour désigner une forme de système comportant deux racines complexes conjuguées ( $\xi < 1$ )

### réponse impulsionnelle

On applique une impulsion de Dirac à l'entrée du système :  $E(p) = 1$  et  $S(p) = G(p)E(p)$ . La réponse impulsionnelle d'un système d'ordre deux de coefficient d'amortissement inférieur à un est donnée par sa fonction de transfert, à partir de laquelle l'expression temporelle se calcule par une décomposition en éléments simples :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)} \quad (1.29)$$

Avec :

$$\begin{cases} p_1 = -\xi\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \\ p_2 = -\xi\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \end{cases} \quad (1.30)$$

Décomposons  $S(p)$  en éléments simples :

$$S(p) = K\omega_0^2 \left( \frac{A}{p - p_1} + \frac{B}{p - p_2} \right) \quad (1.31)$$

On obtient  $A = \frac{1}{P_1 - P_2}$  et  $B = \frac{1}{P_2 - P_1}$ . D'où l'expression de la sortie :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{p_1 - p_2} \left( \frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2} \right) \quad (1.32)$$

Qui s'écrit, dans le domaine temporel :

$$s(t) = \frac{K\omega_0^2}{2j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \quad (1.33)$$

$$s(t) = \frac{K\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \left( \frac{e^{j\omega_0 t\sqrt{1-\xi^2}} - e^{-j\omega_0 t\sqrt{1-\xi^2}}}{2j} \right) \quad (1.34)$$

Finalement,

$$s(t) = \frac{K\omega_0 e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_0 t\sqrt{1-\xi^2}) \quad (1.35)$$

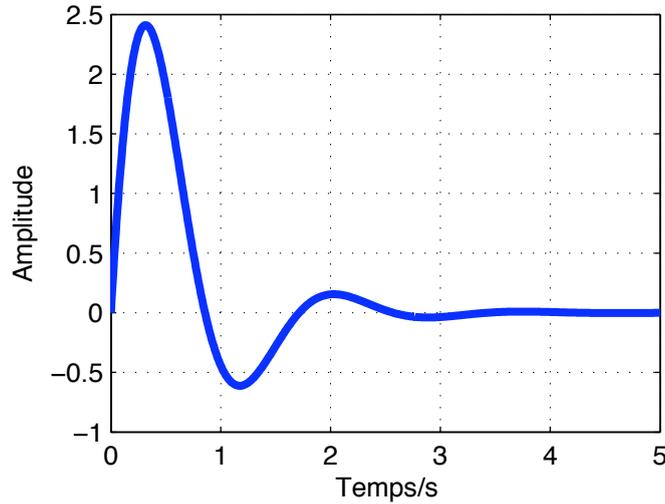


FIGURE 1.7 – Exemple de réponse impulsionnelle d'un système d'ordre deux, de gain statique unitaire, coefficient d'amortissement  $\xi = 0,4$  et pulsation propre  $\omega_0 = 4rd/sec$ .

La forme du signal de sortie obtenu est une sinusoïde amortie de manière exponentielle. D'autre part, on note que la dérivée de cette courbe à l'origine vaut  $s'(0) = K\omega_0^2$ .

La figure 1.7 est un exemple de réponse impulsionnelle d'un système d'ordre deux, de gain statique unitaire, coefficient d'amortissement  $\xi = 0,4$  et pulsation propre  $\omega_0 = 4rd/sec$ .

### Réponse indicielle (échelon de commande) $\xi < 1$

$$e(t) = t \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p}$$

$$S(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{K\omega_0^2}{p^2 - 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2} = K\omega_0^2 \frac{1}{p(p-p_1)(p-p_2)} \quad (1.36)$$

L'équation précédente se décompose en éléments simple :

$$S(p) = K\omega_0^2 \left( \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-p_1)} + \frac{C}{(p-p_2)} \right) \quad (1.37)$$

$$S(p) = K\omega_0^2 \left( \frac{1}{p_1 p_2 p} + \frac{1}{p_1(p_1-p_2)(p-p_1)} + \frac{1}{p_2(p_2-p_1)(p-p_2)} \right) \quad (1.38)$$

Or  $p_1 \cdot p_2 = \omega_0^2$ , d'où :

$$S(p) = K \left[ \frac{1}{p} + \frac{1}{(p_1-p_2)} \left( \frac{p_2}{p-p_1} - \frac{p_1}{p-p_2} \right) \right] \quad (1.39)$$

L'expression temporelle de la sortie du système se déduit :

$$s(t) = K \left( 1 + \frac{1}{(p_1-p_2)} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) \right) \quad (1.40)$$

En utilisant des notations exponentielle pour exprimer les pôles complexes du système, un raisonnement similaire de celui réalisé pour la réponse impulsionnelle conduit à l'expression finale du signal de sortie suivante :

$$s(t) = K \left[ 1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left( \omega_0 t \sqrt{1-\xi^2} + \arcsin \sqrt{1-\xi^2} \right) \right] \quad (1.41)$$

Temps de montée	$t_m = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} (\pi - \arccos \xi)$
Temps de réponse à $n\%$ ( $\xi < 0.7$ )	$t_r = \frac{1}{\omega_0 \xi} \ln \left( \frac{100}{n} \right)$
Temps du premier maximum	$t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$
Pseudo-période	$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$
Dépassement	$D\% = 100 \exp \left( -\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right)$

TABLE 1.1 – Formules liants les paramètres d'un système linéaire d'ordre deux avec les caractéristiques de sa réponse indicielle.

La courbe obtenue, est une sinusoïde amortie par une exponentielle décroissante, avec une asymptote horizontale en  $K$ . La figure 1.8 montre l'évolution de la réponse indicielle de quatre systèmes d'ordre deux, de gain statique unitaire, coefficient d'amortissement  $\xi = 0,25$ ,  $\xi = 0,4$ ,  $\xi = 0,5$  et  $\xi = 0,7$  (resp. pour les courbes 1, 2, 3 et 4) et pulsation propre  $\omega_0 = 4rd/sec$ . On constate que plus le coefficient d'amortissement diminue, plus les oscillations sont importantes. D'autre part, on constate que le signal obtenu présente un maximum plus important que l'asymptote finale,  $s(\infty) = K$ . On parlera alors de dépassement du signal.

La figure 1.9 montre les différentes mesures utilisées pour caractériser un système d'ordre deux :

- ▷ le dépassement  $D\%$  exprimé en pourcentage et défini par la valeur maximum du signal de sortie ramené sur sa valeur finale,
- ▷ le temps de montée  $t_m$  défini lorsque le signal de sortie atteint pour la première fois 90% de sa valeur finale,
- ▷ le temps de pic  $t_{pic}$  (aussi appelé temps du premier dépassement) défini lorsque le signal de sortie atteint sa valeur maximum,
- ▷ la pseudo-période  $T_p$  définie par la période de la sinusoïde amortie<sup>3</sup>,
- ▷ le temps de réponse à  $n\%$  défini par lorsque le signal de sortie peut être contenu dans un intervalle de  $\pm n\%$  autour de sa valeur finale.

Toutes ces mesures sont liées aux paramètres du système par les formules présentées dans la tableau 1.1

Il est possible d'identifier les paramètres d'un système d'ordre deux à partir de relevés graphiques effectués sur la courbe de réponse indicielle du système. Le calcul du gain statique s'effectue de manière identique à un système d'ordre un ( $K = \frac{\Delta_s}{\Delta_e}$ ). Il est ensuite possible de calculer le coefficient d'amortissement  $\xi$  à partir

de la valeur du dépassement en inversant la formule  $D\% = 100 \exp \left( -\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right)$ . Une fois le coefficient d'amortissement déterminé, il reste à calculer la pulsation propre à partir de la mesure du temps de montée, du temps de pic, du temps de réponse ou de la pseudo-période. Pour des systèmes très amortis, le temps de montée est plus précis à déterminer. Par contre pour des systèmes présentant une forte oscillation, la mesure de la pseudo-période, ou du temps de pic est plus précise.

D'un point de vue pratique, l'utilisation d'abaques graphiques ou d'un tableau de valeur numérique simplifie la procédure d'identification des systèmes. La figure 1.10 montre deux abaques utilisées dans l'identification et la mise en oeuvre de modèles d'ordre deux. La courbe de gauche montre l'évolution du temps de réponse

<sup>3</sup>On peut noter que la pseudo-période est le double du temps de pic

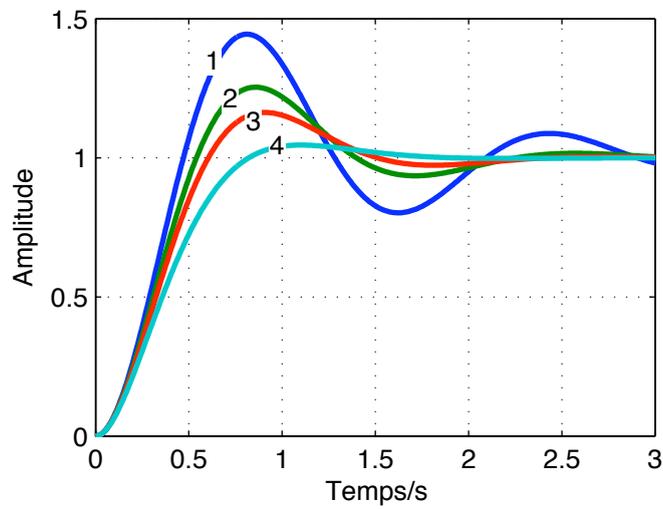


FIGURE 1.8 – Exemple de quatre réponses indicielles de quatre systèmes d'ordre deux, de gain statique unitaire, coefficient d'amortissement  $\xi = 0,25$ ,  $\xi = 0,4$ ,  $\xi = 0,5$  et  $\xi = 0,7$  (resp. pour les courbes 1, 2, 3 et 4) et pulsation propre  $\omega_0 = 4\text{rd}/\text{sec}$ .

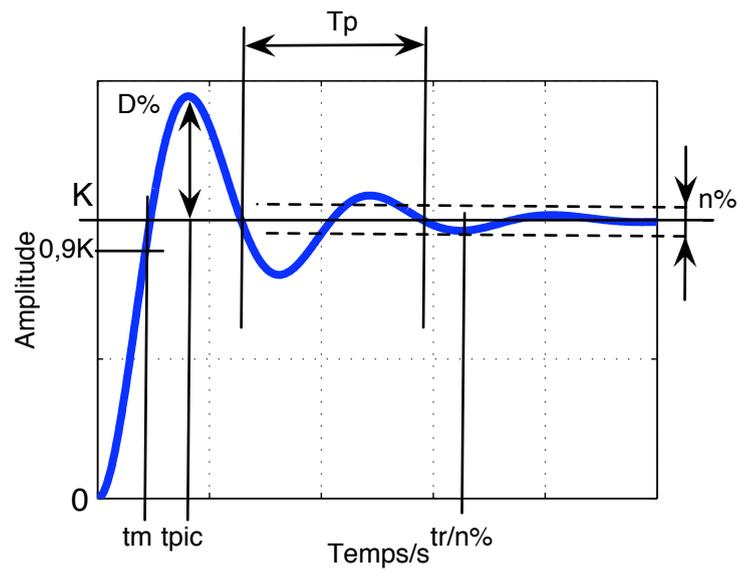


FIGURE 1.9 – Différentes mesures utilisées pour caractériser le comportement temporel d'un système d'ordre deux. Il est possible de remonter aux paramètres du système à partir de ces mesures.

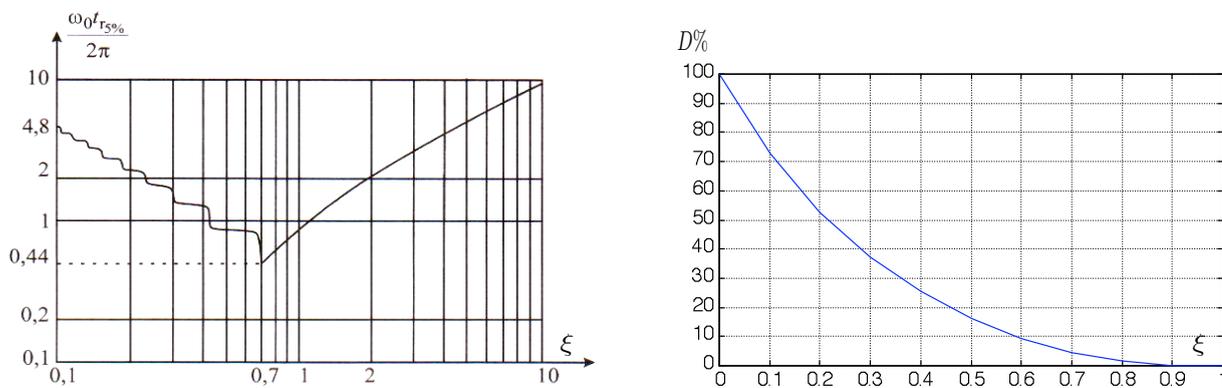


FIGURE 1.10 – Abaques utilisées dans la définition d’un modèle d’ordre deux. L’abaque de gauche représente l’évolution du temps de réponse à 5% en fonction du coefficient d’amortissement. L’abaque de droite représente l’évolution du dépassement en fonction du coefficient d’amortissement.

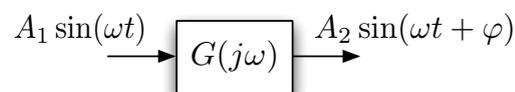


FIGURE 1.11 – Principe de l’étude harmonique d’un système linéaire continu. On observe la variation de l’amplitude et le déphasage généré par un système continu lorsqu’il est excité par une entrée sinusoïdale.

par rapport au coefficient d’amortissement. On constate l’apparition d’un minima pour  $\xi = 0,7$ . Cette valeur présente un bon compromis entre l’amortissement et le temps de réponse ; elle est donc souvent utilisée dans la conception de modèles pour la mise en oeuvre de régulateurs. La courbe de droite montre l’évolution du dépassement en fonction du coefficient d’amortissement.

Le tableau 4.1 est souvent utilisé dans la pratique car il permet d’approximer rapidement les paramètres d’un système d’ordre deux à partir de sa réponse indicielle.

## 1.4 Etude hamonique des systèmes linéaires

Il existe deux principaux espaces pour étudier les systèmes linéaires : L’espace temporel, qui est développé dans la section précédente et l’espace fréquentiel, qui est abordé dans cette section. Le principe consiste à appliquer, à l’entrée du système à étudier, un signal sinusoïdal, dans la zone de linéarité du système ; et à observer l’amplitude et la fréquence du signal en sortie du système, en fonction de l’amplitude et de la fréquence du signal d’entrée.

La figure 1.11 illustre le principe de l’étude harmonique d’un système linéaire continu. Si le système est excité par une entrée sinusoïdale  $e(t) = A_1 \sin(\omega t)$ , la sortie du système est également un signal sinusoïdal, de même fréquence :  $s(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi)$ .

La fonction de transfert du système est donnée par le rapport entre la transformée de Laplace du signal de sortie et celle du signal d’entrée. Dans le cas de signaux sinusoïdaux, la variable de Laplace est uniquement composée d’une partie imaginaire :  $p = j\omega$ , où  $\omega$  est la pulsation du signal sinusoïdal appliqué. La transformée de Laplace devient alors la transformée de Fourier et la fonction de transfert  $G(p)$  s’exprime  $G(j\omega)$ .

L’étude harmonique d’un système continu consiste alors à analyser l’évolution du nombre complexe  $G(j\omega)$  en fonction de la pulsation  $\omega$ . De manière classique, un nombre complexe est représenté soit par sa partie entière et sa partie imaginaire, soit par son module et son argument. Il est alors pratique de représenter cette évolution

$\xi$	$\omega_0 t_m$	$\omega_0 t_{pic}$	$\omega_0 T_p$	$D\%$
0,1	1,68	3,16	6,31	72,92
0,15	1,74	3,18	6,36	62,09
0,2	1,81	3,21	6,41	52,66
0,25	1,88	3,24	6,49	44,43
0,3	1,97	3,29	6,59	37,23
0,35	2,06	3,35	6,71	30,92
0,4	2,16	3,43	6,86	25,38
0,45	2,28	3,52	7,04	20,53
0,5	2,42	3,63	7,26	16,3
0,55	2,58	3,76	7,52	12,63
0,6	2,77	3,93	7,85	9,48
0,65	3	4,13	8,27	6,81
0,7	3,29	4,4	8,8	4,6
0,75	3,66	4,75	9,5	2,84
0,8	4,16	5,24	10,47	1,52
0,85	4,91	5,96	11,93	0,63
0,9	6,17	7,21	14,41	0,15
0,95	9,04	10,06	20,12	0,01

TABLE 1.2 – Tableau des valeurs numériques d'un système d'ordre deux

sous une forme graphique, ce qui conduit aux diagrammes de Bode, Black Nichols et Nyquist.

### 1.4.1 Différentes représentations issues de l'étude harmonique des systèmes linéaires continus

L'étude harmonique d'un système linéaire continu consiste à représenter la variation d'un nombre complexe en fonction de la pulsation de la sinusoïde du signal d'entrée. Dans le cas où l'on représente le nombre complexe par son module et son argument, qui traduisent le gain exprimé en *db* et le déphasage, deux types de représentation sont possibles. La première consiste à représenter, sur une courbe, l'évolution du gain en fonction de la pulsation, et sur une seconde courbe, l'évolution du déphasage en fonction de la pulsation. Ces deux courbes forment le diagramme de Bode. Le deuxième type de représentation consiste à représenter, sur une courbe paramétrée par la pulsation, l'évolution du déphasage sur l'axe des abscisses, et l'évolution du gain sur l'axe des ordonnées. Cette représentation est appelée diagramme de Black-Nichols. Enfin, si  $G(j\omega)$  est représenté par sa partie réelle et sa partie imaginaire, on représente son évolution, par une courbe paramétrée par la pulsation, la partie réelle sur l'axe des abscisses et la partie imaginaire sur l'axe des ordonnées. Cette courbe est appelée diagramme de Nyquist. Cette dernière ne sera pas abordée dans ce document. La figure 1.12 montre le diagramme de Bode (gauche) et le lieu de Black (droite) d'un système d'ordre un de fonction de transfert :

$G(p) = \frac{1}{1 + 0.3p}$ . La figure 1.13 montre le diagramme de Bode (gauche) et le lieu de Black (droite) d'un

système d'ordre deux de fonction de transfert :  $G(p) = \frac{1}{1 + p + p^2}$ .

Dans cette partie, nous détaillons un seul type de représentation, le diagramme de Bode, et nous proposons une méthode d'analyse rapide appelée diagramme de Bode asymptotique.

### 1.4.2 La forme générale du gain et du déphasage d'un système continu

Tout système peut être représenté par sa fonction de transfert, exprimée dans le domaine de Laplace. Lors d'une analyse harmonique, la variable de Laplace est remplacée par l'imaginaire pur  $j\omega$ . La forme générale

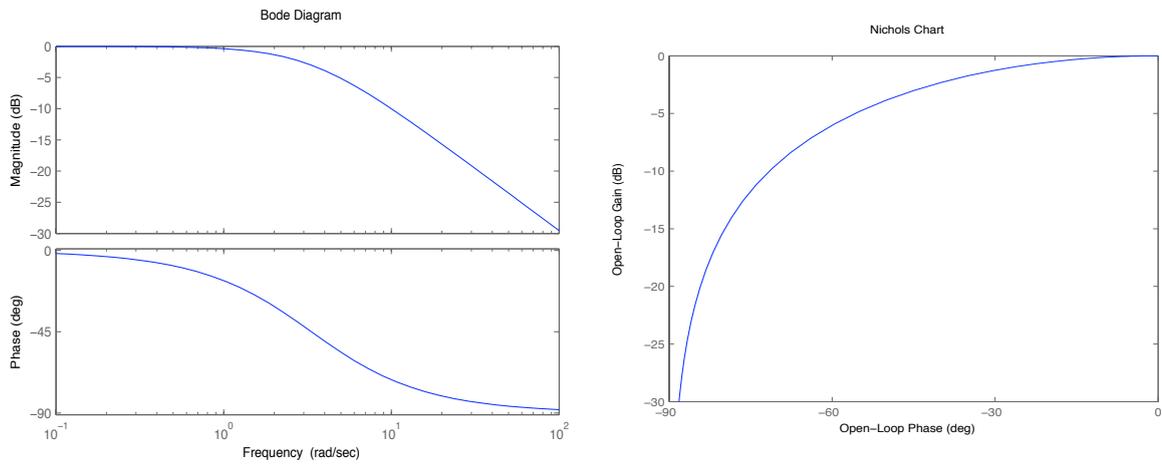


FIGURE 1.12 – Exemple de diagramme de Bode et lieu de Black d’un système d’ordre un.

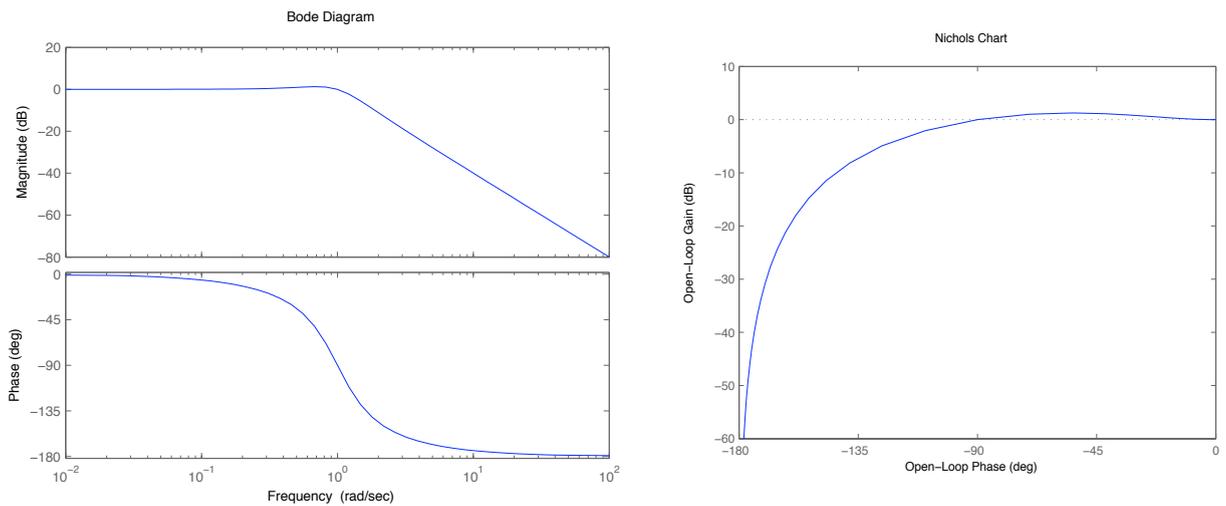


FIGURE 1.13 – Exemple de diagramme de Bode et lieu de Black d’un système d’ordre deux.

d'une fonction de transfert s'écrit alors :

$$G(j\omega) = K \frac{\prod_m (1 + j\omega/\omega_m) \prod_n (1 + (2\xi_n/\omega_n)j\omega + (j\omega/\omega_n)^2)}{(j\omega)^r \prod_o (1 + j\omega/\omega_o) \prod_p (1 + (2\xi_p/\omega_p)j\omega + (j\omega/\omega_p)^2)} \quad (1.42)$$

Cette expression est composée d'un gain statique  $K$ , d'intégrateurs  $j\omega$ , de termes d'ordre un et de termes d'ordre deux. Son gain s'exprime en décibel, soit  $|G|_{db} = 20 \log |G|$ . L'expression du gain de la forme générale d'un fonction de transfert se décompose alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{db} = & 20 \log(K) + \sum_m 20 \log |(1 + j\omega/\omega_m)| + \\ & \sum_n 20 \log |(1 + (2\xi_n/\omega_n)j\omega + (j\omega/\omega_n)^2)| \\ & - 20r \log(\omega) - \sum_o 20 \log |(1 + j\omega/\omega_o)| \\ & - \sum_p 20 \log |(1 + (2\xi_p/\omega_p)j\omega + (j\omega/\omega_p)^2)| \quad (1.43) \end{aligned}$$

Il est ainsi intéressant de noter l'intérêt du passage en expression logarithmique qui rend additif les gains de chaque partie de la fonction de transfert. Le déphasage du système s'exprime également sous une forme additive :

$$\begin{aligned} \arg(G(j\omega)) = & \sum_m \arg(1 + j\omega/\omega_m) + \\ & \sum_n \arg(1 + (2\xi_n/\omega_n)j\omega + (j\omega/\omega_n)^2) \\ & - r\pi/2 - \sum_o \arg(1 + j\omega/\omega_o) \\ & - \sum_p \arg(1 + (2\xi_p/\omega_p)j\omega + (j\omega/\omega_p)^2) \quad (1.44) \end{aligned}$$

La forme additive des deux équations précédentes permet de calculer le module et l'argument de n'importe quel système continu linéaire à partir de la combinaison de systèmes simple d'ordre un ou d'ordre deux. La suite de cette section est dédiée à l'analyse de ces systèmes simples.

### 1.4.3 Le diagramme de Bode asymptotique

Nous venons de voir qu'il était possible d'obtenir l'évolution du gain et de la phase d'un système quelconque en le décomposant en une somme de systèmes simples et en additionnant les contributions de chacun de ces systèmes simples. Cette section présente une méthode d'analyse très rapide des systèmes, appelée analyse asymptotique.

**Cas des systèmes d'ordre un** La fonction de transfert d'un terme d'ordre un s'écrit :

$$G(j\omega) = 1 + j\omega/\omega_c \quad (1.45)$$

Le gain (module) et le déphasage (argument) de ce système s'expriment :

$$|G(\omega)|_{db} = 20 \log \sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2} \quad (1.46)$$

$$\arg(G(\omega)) = \arctan(\omega/\omega_c) \quad (1.47)$$

où  $\omega_c$  est appelé pulsation de cassure. Dans le cas d'un système d'ordre 1, cette pulsation de cassure est confondue avec la pulsation de coupure<sup>4</sup>. L'étude asymptotique du système consiste à analyser son comportement pour

$\omega \ll \omega_c$	$\omega \gg \omega_c$
$ G(\omega) _{db} \approx 20 \log(1)$	$ G(\omega) _{db} \approx 20 \log(\omega/\omega_c)$
$ G(\omega) _{db} \approx 0$	
$\arg(G(\omega)) \approx \arctan(0)$	$\arg(G(\omega)) \approx \arctan(\infty)$
$\arg(G(\omega)) \approx 0$	$\arg(G(\omega)) \approx \pi/2$

TABLE 1.3 – Etude asymptotique d’un terme d’ordre un dont l’expression est  $G(\omega) = 1 + j\omega/\omega_c$

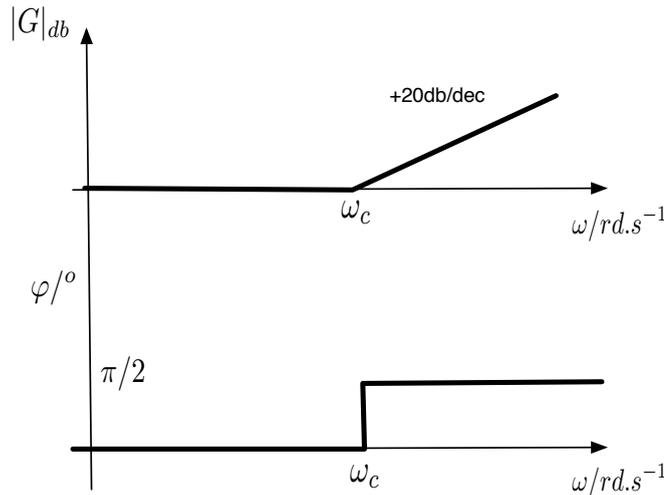


FIGURE 1.14 – Exemple de diagramme de Bode asymptotique d’un système d’ordre un.

des valeurs de la pulsation éloignées des pulsations de coupure. Le comportement est synthétisé dans le tableau 1.3 :

La figure 1.14 montre le diagramme de Bode asymptotique correspondant à ce système. Pour  $\omega = \omega_c$ , le gain est de  $|G(\omega = \omega_c)|_{db} = 20 \log(\sqrt{2}) \approx 3db$ . Le déphasage du système est de  $\arg(G(\omega = \omega_c)) = \arctan(1) = \pi/4$ .

**Cas des systèmes d’ordre deux** La fonction de transfert d’un terme d’ordre deux s’écrit :

$$G(j\omega) = 1 + (2\xi/\omega_c)j\omega + (j\omega/\omega_c)^2 \tag{1.48}$$

Le gain (module) et le déphasage (argument) de ce système s’expriment :

$$|G(\omega)|_{db} = 20 \log \sqrt{(1 - (\omega/\omega_c)^2)^2 + (2\xi\omega/\omega_c)^2} \tag{1.49}$$

$$\arg(G(\omega)) = \arg((1 - (\omega/\omega_c)^2) + j(2\xi\omega/\omega_c)) \tag{1.50}$$

Dans le cas d’un système d’ordre deux, la fonction arctan doit être utilisée avec précaution pour calculer le déphasage. En effet, cette dernière retourne une valeur dans l’intervalle  $[-\pi/2; \pi/2]$ . Or lorsque la partie réelle de  $G(\omega)$  est négative, son argument se situe dans l’intervalle  $[\pi/2; \pi]$ . Dans ce cas, il faut donc ajouter un  $\pi$  à la valeur retournée par la fonction arctan.

$\omega_c$  est appelée pulsation de cassure. Contrairement au cas des systèmes d’ordre 1, cette pulsation de cassure n’est plus confondue avec la pulsation de coupure. L’étude asymptotique du système consiste à analyser son comportement pour des valeurs de la pulsation éloignées des pulsations de coupure. Le comportement est synthétisé dans le tableau 1.4.

La figure 1.15 montre le diagramme de Bode asymptotique correspondant à ce système.

<sup>4</sup>La pulsation de coupure est la valeur de la pulsation pour laquelle le gain perd 3db par rapport à son maximum

$\omega \ll \omega_c$	$\omega \gg \omega_c$
$ G(\omega) _{db} \approx 20 \log(1)$	$ G(\omega) _{db} \approx 40 \log(\omega/\omega_c)$
$ G(\omega) _{db} \approx 0$	
$\arg(G(\omega)) \approx \arctan(0)$	$\arg(G(\omega)) \approx \arg(-\infty)$
$\arg(G(\omega)) \approx 0$	$\arg(G(\omega)) \approx \pm\pi$

TABLE 1.4 – Etude asymptotique d'un terme d'ordre deux dont l'expression est  $G(j\omega) = 1 + (2\xi/\omega_c)j\omega + (j\omega/\omega_c)^2$

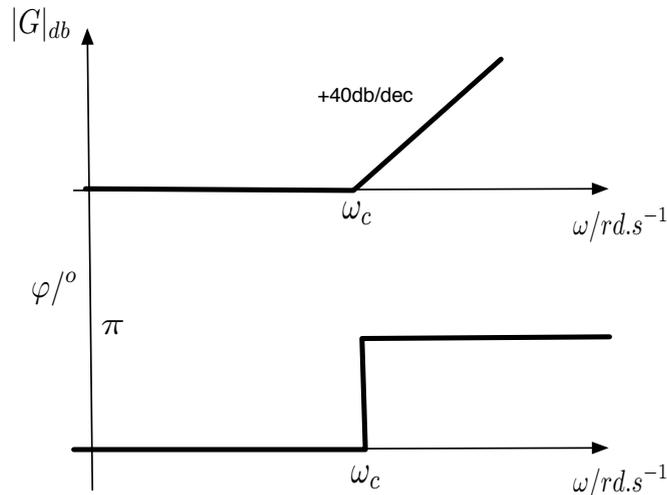


FIGURE 1.15 – Exemple de diagramme de Bode asymptotique d'un système d'ordre deux.

## 1.5 Conclusion

Les systèmes d'ordre un ou deux sont aussi appelés systèmes standards ou systèmes primordiaux. La mise en cascade de ces derniers permet de modéliser n'importe quel système linéaire.

Les systèmes d'ordre un, caractérisés par leur gain statique et leur constante de temps présentent une réponse indicielle temporelle qui tend de manière asymptotique vers la valeur du gain avec un comportement exponentiel. Leur détermination s'effectue graphiquement de manière très simple à partir d'un essai à un échelon.

Les systèmes d'ordre deux sont caractérisés par leur gain statique, leur coefficient d'amortissement et leur pulsation propre. Ils sont très utilisés en automatique de par leur présence dans de nombreux systèmes réels et leur simplicité d'étude. Il est très simple de synthétiser un modèle d'ordre deux à partir d'un cahier des charges contenant une contrainte de temps de montée et de dépassement. Nous verrons que les modèles d'ordre deux sont très souvent utilisés comme modèle à atteindre dans la synthèses de correcteurs.

L'identification de systèmes réels par des modèles linéaires d'ordre un ou deux s'effectue toujours autour d'un point de fonctionnement. Il est extrêmement important de connaître la page de validité du modèle identifié.

Les modèles issus de l'étude harmonique des systèmes linéaires (Bode, Black, Nyquist) représentent des modèles graphiques des systèmes. Ils peuvent être ensuite utilisés pour étudier la stabilité des systèmes asservis, et synthétiser un correcteur continu.



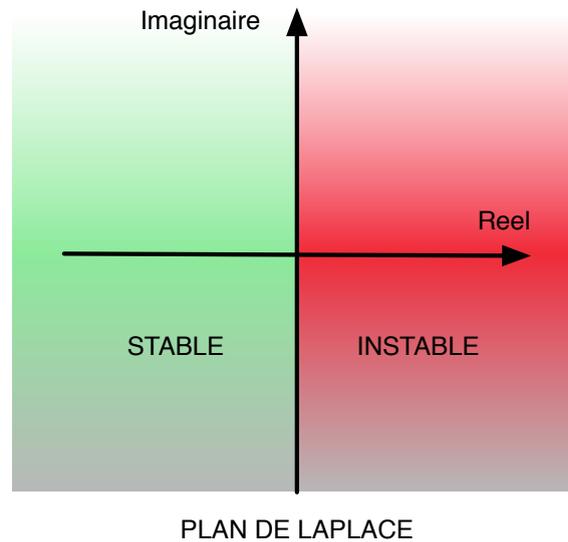


FIGURE 1.16 – Représentation des pôles et des zéros dans le plan de Laplace. Le demi-plan gauche définit la zone de stabilité

## 1.6 La stabilité des systèmes continus

Un des objectifs de la régulation est de modifier le comportement des processus afin de les rendre conforme à un cahier des charges fonctionnel. La stabilité est le premier objectif fixé par ce cahier des charges.

Ce chapitre présente des méthodes numériques et graphiques pour déterminer la stabilité d'un système linéaire continu dont on connaît soit l'expression analytique de la fonction de transfert, soit une représentation graphique de sa réponse harmonique (Bode, Black, Nyquist).

### 1.6.1 Définition générale

Tout système physique est caractérisé par sa réponse impulsionnelle  $h(t)$  qui est aussi sa fonction de transfert.

L'évolution de cette réponse dans le temps permet de dire si un système est stable ou non.

**Définition :** Un système est asymptotiquement stable si

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0} \quad (1.51)$$

Or, tout système peut être décomposé en une somme d'éléments simple :

$$H(p) = \sum_i \frac{A_i}{p - p_i} \quad (1.52)$$

où les pôles  $p_i$  peuvent être des réels ou des complexes. La transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert est la réponse impulsionnelle du système :

$$h(t) = \sum_i A_i e^{p_i t} \quad (1.53)$$

Cette réponse tend vers zéros si et seulement chaque exponentielle de la somme tend vers zéro. **On en déduit que tous les pôles  $p_i$  doivent être à partie réelle négative.** Il est fréquent de représenter les pôles et les zéros d'un système sous forme graphique dans le plan de Laplace, comme illustré sur la figure 1.16

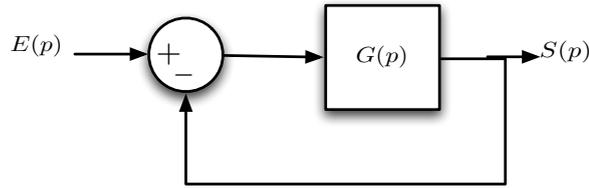


FIGURE 1.17 – Représentation d’un schéma d’asservissement à retour unitaire pour lequel nous voulons déterminer les conditions de stabilité

### 1.6.2 Stabilité d’un système asservi

Posons nous la question de déterminer la stabilité d’un système asservi. La figure 1.17 représente l’asservissement (retour unitaire) d’un système modélisé par sa fonction de transfert  $G(p)$ . L’étude de la stabilité reviendra à calculer les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée. C’est équivalent à rechercher les solutions de l’équation caractéristique  $1 + G(p) = 0$ , donnée par le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée  $F(p)$  :

$$F(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} \tag{1.54}$$

Deux cas de figure se présentent :

1. Le système est dit à déphasage minimal si la fonction de transfert en boucle ouverte ne possède ni zéros instables, ni pôles instables ni retard.
  2. Le système est dit à déphasage non minimal dans les autres cas
- ▷ **Premier cas** : on pourra appliquer des critères simplifiés de stabilité.
  - ▷ **Deuxième cas** : un critère d’application général devra être utilisé.

### 1.6.3 Critère simplifié : critère du revers

Ce critère, exprimé dans le plan de BLACK, stipule que pour le point  $\omega_0$  correspondant à  $|T(j\omega)| = 1$  (ou  $0dB$ ) on ait un déphasage  $< -180$  pour avoir un système stable. En d’autres termes, le système est stable si, lorsque l’on parcourt le lieu de black dans le sens des pulsations croissantes, le point d’instabilité est laissé sur la droite (fig. 1.18)

En d’autre terme, si on parcourt le lieu de Black pour des  $\omega$  croissants on laisse le point  $[0dB, -180^0]$  sur la droite.

### 1.6.4 Critère d’application général

#### 1.6.4.1 Critère de Routh

C’est un critère algébrique qui permet de déterminer le nombre de racines à partie réelle  $> 0$  d’un polynome  $P(\lambda)$  à coefficients réels.

$$P(\lambda) = a_0 + a_r\lambda + \dots + a_n\lambda^n \tag{1.55}$$

Construction du tableau de Routh

ligne 1	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$a_{n-6}$
Ligne 2	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$a_{n-7}$
Ligne 3	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$a_{34}$
Ligne 4	$a_{41}$	$a_{42}$	$a_{43}$	$a_{44}$

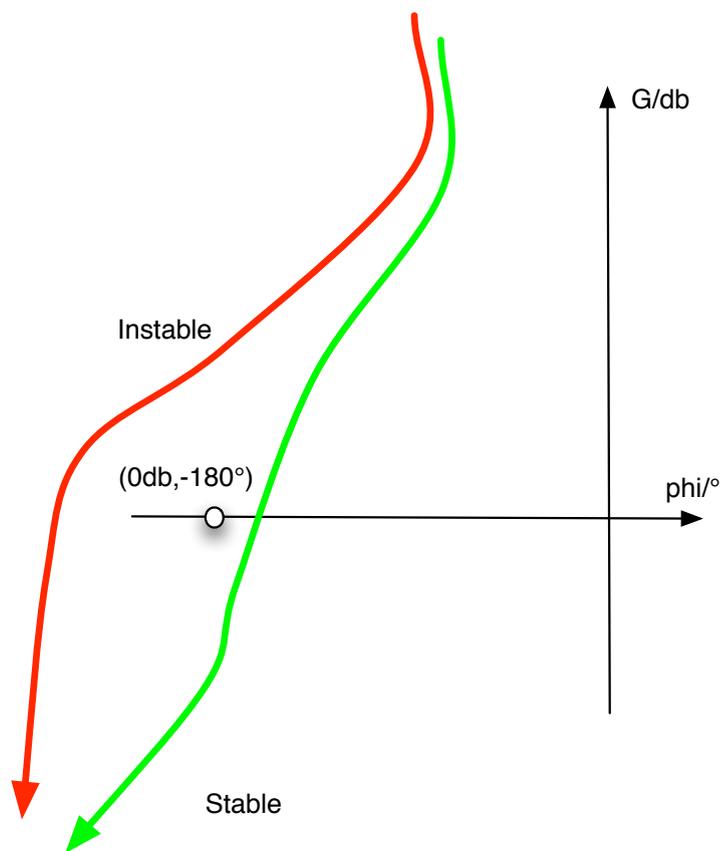


FIGURE 1.18 – Détermination du degré de stabilité d'un système linéaire dans le diagramme de Black à l'aide du critère du Revers. Le système est stable si, lorsque l'on parcourt le lieu de black dans le sens des pulsations croissantes, le point d'instabilité est laissé sur la droite

$$a_{31} = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_n \cdot a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$a_{32} = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-4} - a_n \cdot a_{n-5}}{a_{n-1}}$$
(1.56)

On remplit ainsi toutes les lignes jusqu'à obtenir des 0.

- ▷ Le tableau de Routh associé à un polynôme d'ordre  $n$  comporte  $(n + 1)$  lignes (en général) et le nombre de changement de signe dans la première colonne du tableau indique le nombre de racines de  $P(\lambda)$  à partie réelle  $> 0$ .
- ▷ Si dans la construction du tableau, l'un des pivots est nul, les autres coefficients de la ligne étant non nuls, cela implique l'existence d'au moins une racine à partie réelle  $> 0$ .  
Si on veut continuer la construction du tableau pour connaître les autres signes des racines, on peut remplacer le pivot nul par un nombre  $\xi$  arbitrairement petit de signe quelconque.
- ▷ Si tous les coefficients d'une ligne  $(k + 1)$  sont nuls, le polynôme  $P(\lambda)$  possède des racines imaginaires. Ces racines sont des solutions du polynôme  $P(\lambda) = 0$ .
- ▷ Si tous les éléments de la première colonne sont nuls (sauf le premier) on applique le critère de Routh au polynôme  $(\lambda + \alpha)P(\lambda)$  avec  $\alpha < 0$ .

**Exemple 1 :**

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 7\lambda^2 + 16\lambda + 12$$
(1.57)

$$\begin{array}{l|lll} L_1 & 1 & 7 & 12 \\ L_2 & 4 & 16 & 0 \\ L_3 & 3 & 12 & 0 \\ L_4 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Le système est stable car tous les éléments de la première colonne sont de même signe.

**Exemple 2 :**

$$p(\lambda) = \lambda^6 - 5\lambda^5 + 11\lambda^4 - 25\lambda^3 + 34\lambda^2 - 20\lambda + 24$$
(1.58)

$$\begin{array}{l|llll} L_1 & 1 & 11 & 34 & 24 \\ L_2 & -5 & -25 & -20 & 0 \\ L_3 & 6 & 30 & 24 & 0 \\ L_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

L'analyse de la première colonne révèle l'existence d'au moins deux racines à partie réelle supérieure à 0

### 1.6.4.2 Application à l'étude de la stabilité d'un processus

Choisir  $k$  pour que le système reste stable.

**Equation caractéristique :**

$$1 + T(p) = 0$$

$$T(p) = \frac{k(4p + 1)}{p(p^2 + 0.3p + 1)(5p - 1)}$$
(1.59)

$$\implies p(p^2 + 0.3p + 1)(5p - 1) + k(4p + 1) = 0$$

$$5p^4 + 0.5p^3 + 4.7p^2 + p(4k - 1) + k = 0$$

$$\begin{array}{l|llll}
 L_1 & & 5 & & 4.7 & k \\
 L_2 & & 0.5 & & (4k - 1) & 0 \\
 L_3 & & (14.7 - 40k) & & k & 0 \\
 L_4 & & \left[ \frac{(14.7 - 40k)(4k - 1) - 0.5k}{14.7 - 40k} \right] & & & 0
 \end{array}$$

⇒ Système stable si et seulement si il y a le même signe sur la première colonne (partie réelle inférieure à 0).

$$\Rightarrow \begin{cases} (14.7 - 40k) > 0 \\ \text{et } (14.7 - 40k)(4k - 1) - 0.5k > 0 \end{cases} \quad \boxed{k < 0.3675} \quad (1.60)$$

$$(k - 0.2572)(k - 0.357) > 0 \quad \begin{cases} k > 0.357 \\ \text{ou} \\ k < 0.2572 \end{cases} \quad (1.61)$$

⇒  $k > 0$

D'où stabilité du système si

$$\begin{array}{l}
 \boxed{0.357 < k < 0.3675} \\
 \boxed{\text{ou } 0 < k < 0.2572}
 \end{array} \quad (\text{pas beaucoup de marge}) ! \quad (1.62)$$

## 1.6.5 Critère de Nyquist

(NON TRAITE)

## 1.6.6 Notion de robustesse de la stabilité

Les critères précédents permettent de dire si un système est "mathématiquement" stable, oscillant ou divergeant. Mais il ne renseigne pas sur la proximité de l'instabilité.

Cette notion de degrés de stabilité est importante car elle conditionnera la **robustesse** du processus asservi face aux perturbations extérieures ou aux erreurs de modélisation de  $F(p)$ .

**Analyse à postériori :**

### 1.6.6.1 A partir de la réponse indicielle

Un système du second ordre présente des oscillations plus ou moins importantes suivant la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$ .

⇒ Plus il est stable, moins le dépassement est important, mais plus  $t_m$  (temps de montée) est long. (Notion de compromis).

⇒ Vouloir une réponse trop rapide entraîne un système plus instable.

### 1.6.6.2 A partir de la réponse fréquentielle (facteur de résonance)

Nous avons vu que pour  $\xi < 0.7$ , la réponse fréquentielle présente un maximum d'amplitude caractérisé par le facteur de résonance  $\lambda = 1$  qui augmente quand  $\xi$  baisse.

En pratique, un amortissement satisfaisant est obtenu pour  $\xi > 0.7$  ⇒ Dépassement indiciel  $< 4\%$ .

⇒ Rappelons que le facteur de résonance (pour un système à retour unitaire) peut se déduire du lieu de Black (utilisation des ABAQUES) et qu'il est d'autant plus grand que l'on se rapproche du point  $(-180, 0dB)$ .

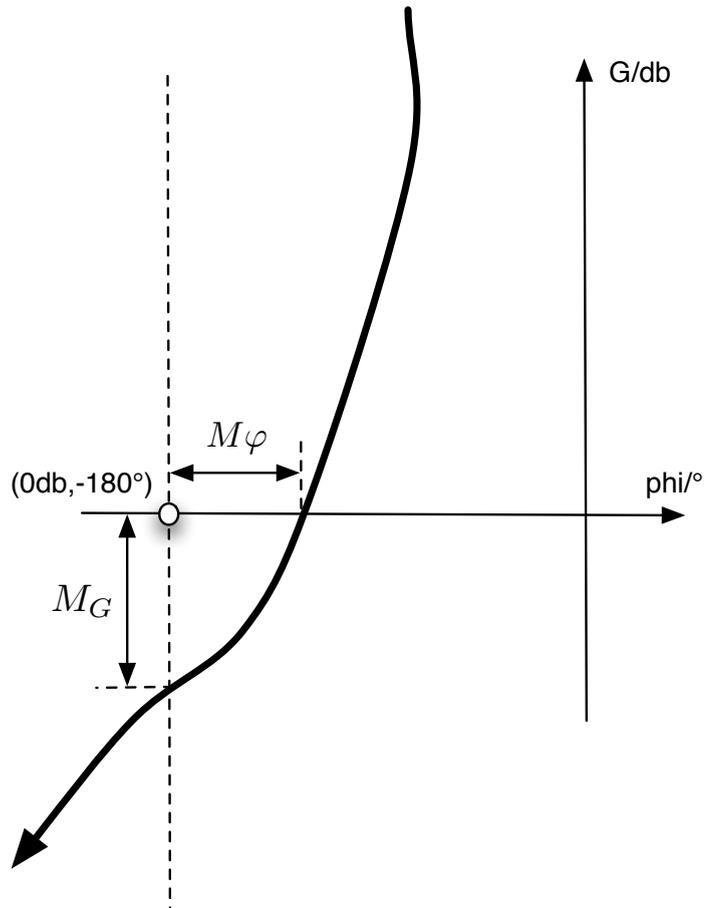


FIGURE 1.19 – Détermination du degré de stabilité d'un système linéaire dans le diagramme de Black à l'aide de la marge de phase et de la marge de gain

### 1.6.6.3 Définition de la marge de phase et de la marge de gain

Ces deux informations permettent d'estimer la proximité de  $T(j\omega)$  du point d'instabilité  $(-180, 0dB)$  (dans le plan de black comme illustré figure 1.19).

- ▷ Marge de phase :  $M_\varphi$  : caractérise l'écart en phase entre  $T(j\omega)$  et  $(-180)$  lorsque  $|T(j\omega)| = 1$  (OdB)
- ▷ Marge de gain :  $M_G$  : caractérise l'écart en gain par rapport à  $0dB$  pour un déphasage de  $-180$ .

**Remarque** : Pour certaines configurations du système, la stabilité impose qu'un des paramètres soit compris entre deux bornes. On parle alors de **stabilité conditionnelle**.

**En pratique** :

- ▷ La marge de gain est exprimée en réel en non  $d_B$ . Elle indique le gain maximal que peut supporter le système sans être déstabilisé.
- ▷ La marge de phase s'exprime en degrés. On admet que  $M_\varphi$  d'au moins 45 assure une très bonne stabilité.

### 1.6.6.4 Définition de la marge de retard

L'introduction d'un retard pur du système  $e^{-T_r p}$  est source d'instabilité (retard entre la commande et la réponse du process).

Ces retards interviennent souvent dans la modélisation des systèmes réels.

$$|e^{-T_R p}| = 1 \quad \text{Arg}(e^{-T_R p}) = -T_R \omega \quad (1.63)$$

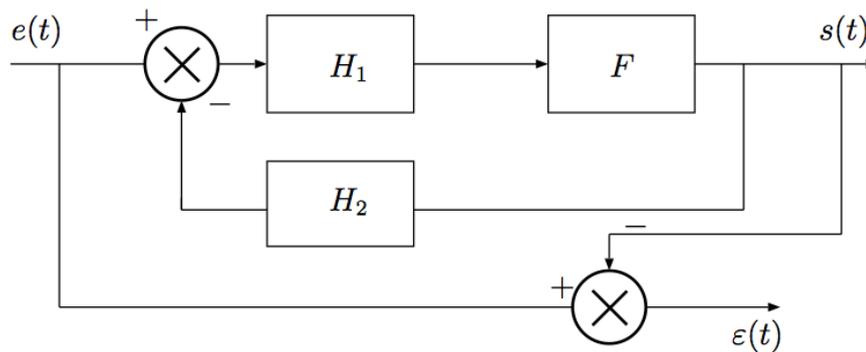
Dans Black, on aura donc un déplacement horizontal de la courbe d'une valeur  $-T_R \omega$  (Donc du côté  $-180$ ).

La valeur maximale de  $T_R$  avant l'instabilité :

$$T_R \omega_0 + \varphi_0 = \pi \quad (1.64)$$

## 1.7 Précision des systèmes asservis

Ce chapitre a pour objectif d'étudier les performances des systèmes asservis et d'évaluer les erreurs éventuelles par rapport aux consignes de commande. Soit le système suivant : (nous supposons que l'étude de stabilité a été réalisée.)



L'erreur du système bouclé est définie par  $\varepsilon(t) = e(t) - s(t)$

$\Rightarrow$  La précision du système est définie à partir de l'analyse du comportement de  $\varepsilon(t)$  :

▷ *Précision statique* :  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$  (erreur en régime permanent)

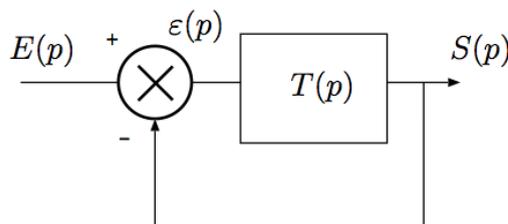
▷ *Précision dynamique* : elle dépend de l'évolution de  $\varepsilon(t)$  (erreur pendant le régime transitoire)

Nous allons étudier les précisions statique et dynamique des systèmes du premier et second ordre à retour unitaire.

### 1.7.1 Précision dynamique d'un système du premier ordre à retour unitaire

On considère un système du premier ordre, régi par la fonction de transfert  $T(p)$  suivante :

$$T(p) = \frac{K}{1 + \tau p} = \frac{S(p)}{E(p)} \text{ en boucle ouverte} \quad (1.65)$$



$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p) \quad (1.66)$$

L'étude de la précision peut être conduite pour n'importe quel type de signal d'entrée. On a coutume d'utiliser un **échelon unitaire**, ce qui simplifie les calculs.

**1.7.1.1 En boucle fermée :**

$$\begin{aligned}
 F(p) &= \frac{T(p)}{1+T(p)} = \frac{K/(1+\tau p)}{1+K/(1+\tau p)} = \frac{K}{K+1+\tau p} \\
 &= \frac{K/(K+1)}{1+\frac{\tau}{K+1}p} = \frac{K_1}{1+\tau_1 p} \text{ (Fonction du premier ordre)}
 \end{aligned}
 \tag{1.67}$$

$$\begin{cases} K_1 = \frac{K}{K+1} \\ \tau_1 = \frac{\tau}{K+1} \end{cases}
 \tag{1.68}$$

**Comme on applique un échelon à l'entrée :**

$$\varepsilon(p) = \varepsilon(p)[1 - F(p)]
 \tag{1.69}$$

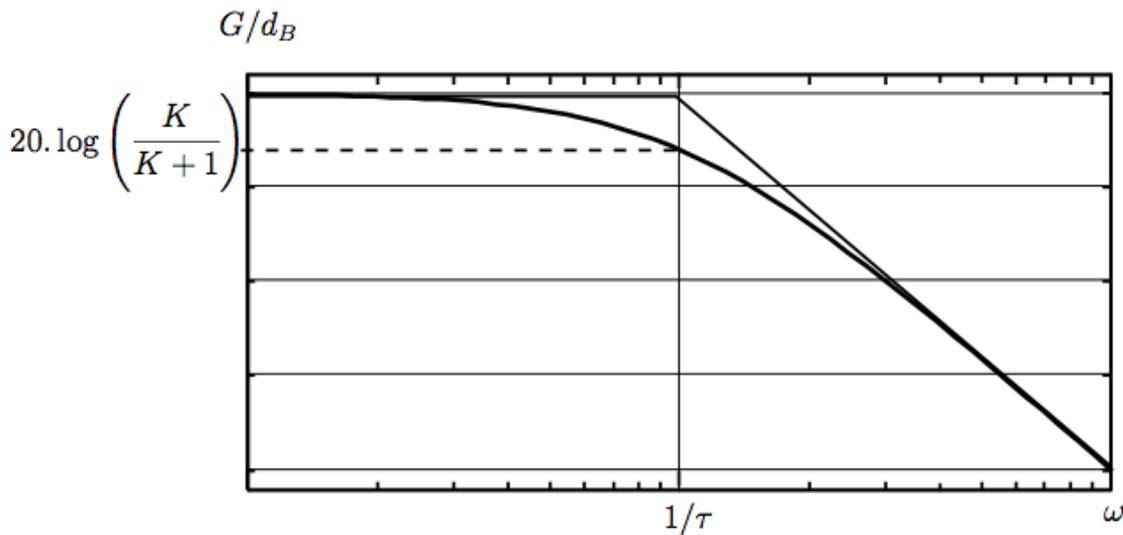
$$\begin{aligned}
 e(t) = 1 \implies \varepsilon(t) &= 1 - s(t) \\
 &= 1 - K_1(1 - e^{-t/\tau_1})
 \end{aligned}
 \tag{1.70}$$

$$\triangleright t \rightarrow \infty, \varepsilon(t) = 1 - K_1 = \frac{1}{K+1}$$

$\triangleright$  La décroissance exponentielle est d'autant plus rapide que  $\tau_1$  est petit [(tr = 3 $\tau$ ) temps de réponse du système] et donc que  $K_1$  est grand.

On parle alors de rapidité ou raideur qui est liée à l'évolution du signal d'erreur.

**Relation rapidité/réponse en fréquence :** Cette caractéristique représente le module de  $F(p)$  en fonction de la fréquence. Nous voyons que c'est un filtre passe bas. On note que plus  $\tau$  est petit et plus  $\omega_0$  augmente laissant passer davantage de hautes fréquences. Un système capable de réagir rapidement a donc nécessairement une bande passante large : dualité (temps/fréquence).



**Remarques :**

- $\triangleright$  La fréquence de coupure est directement mesurable dans l'abaque de Black sans connaître l'expression analytique de  $T(j\omega)$ .
- $\triangleright$  Pour une constante de temps  $\tau$ , fixée, la vitesse du système sera d'autant plus importante que le gain en boucle ouverte  $K$  sera grand.

### 1.7.2 Précision dynamique d'un système du second ordre à retour unitaire

La fonction de transfert en boucle ouverte d'un tel système est de la forme

$$T(p) = \frac{K}{p(1 + \tau p)} \quad (1.71)$$

Soit encore

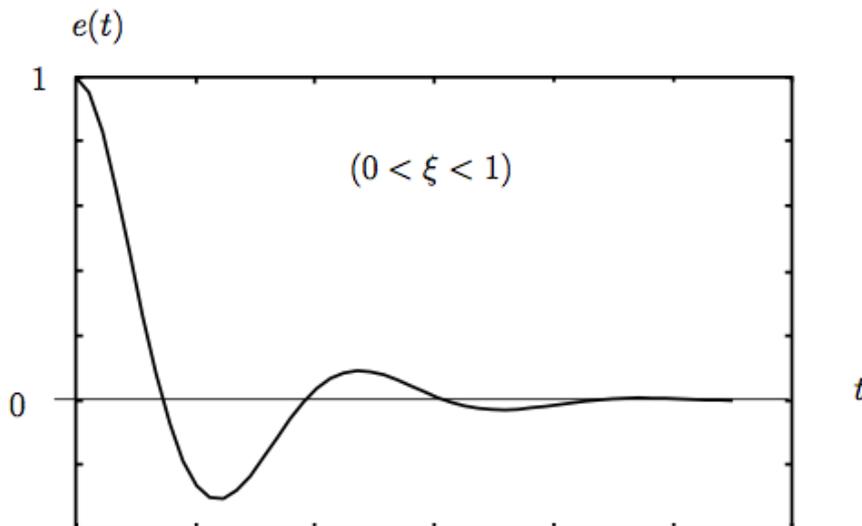
$$F(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} = \frac{K}{p(1 + \tau p) + K} = \frac{1}{1 + \frac{p}{K} + \frac{\tau}{K}p^2} \quad (1.72)$$

et donc de la forme canonique :

$$F(p) = \frac{1}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}p + \frac{1}{\omega_n^2}p^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_n = \sqrt{\frac{K}{\tau}} \\ \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{1}{K} \\ \xi^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{K\tau}} \end{array} \right. \quad (1.73)$$

#### 1.7.2.1 Erreur du système à une entrée échelon (asservissement en position)

$$\varepsilon(t) = Ae^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n t + \varphi) \quad (1.74)$$



#### Remarques

- ▷ La forme de  $\varepsilon(t)$  est caractérisée par la valeur de  $\xi$ . plus  $\xi$  devient faible et plus le système présente des oscillations avant l'amortissement final.
- ▷ Rapidité de réponse : le système est d'autant plus rapide que son régime transitoire est court ( $tr$  est défini à  $\pm 5\%$ ).  $tr$  augmente lorsque  $\xi$  diminue (régime oscillant), mais  $tr$  peut être également très grand quand  $\xi$  est important (amortissement long dans le temps).  $\implies$  En dérivant on montre que  $tr$  minimum est obtenu pour  $\xi$  voisin de 0,7.
- ▷ Relation entre amortissement et rapidité sur la représentation en fréquence : nous avons vu que plus  $\xi$  est petit, plus  $Q$ , le facteur de résonance, est important. le module de  $F(p)$  passe donc par un maximum important qui peut être néfaste au système (surtensions).

Par contre, la pulsation de coupure (donc la bande passante) qui caractérise la raideur du système augmente. Il est donc nécessaire de trouver un compromis afin d'avoir un bon temps de réponse tout en limitant les sursensions du gain.

- ▷ Relation précision dynamique gain : Idem, plus  $K$  augmente, plus  $\omega_c$  augmente (et donc la bande passante) permettant au système de réagir rapidement (hautes fréquences). Cependant attention aux oscillations dues à  $\xi$  qui décroît.
- ▷ Fonction d'ordre  $> 2$  : Pour les systèmes d'ordre  $> 2$ , on peut généralement conduire les mêmes analyses que pour les systèmes du second ordre. Les réponses fréquentielles de tels systèmes sont en fait très voisines.
- ▷ Si  $\xi > 1$  la réponse ressemble à celle d'un premier ordre.

### 1.7.3 Précision statique

#### 1.7.3.1 Définition des erreurs stationnaires :

On appelle erreur stationnaire d'ordre  $n$ , la limite de  $\varepsilon_n(t)$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ , lorsqu'on applique à l'entrée du système un signal :

$$e_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \Gamma(t) \quad (1.75)$$

Soit, dans le plan de Laplace

$$E_n(p) = \frac{1}{p^n} \quad (1.76)$$

$$\text{Ainsi } n = 1 \quad e_1(t) = \Gamma(t) \quad E_1(p) = \frac{1}{p} \quad [\text{échelon de position}]$$

$$n = 2 \quad e_2(t) = t \quad E_2(p) = \frac{1}{p^2} \quad [\text{échelon de rampe}] \quad (1.77)$$

$$n = 3 \quad e_3(t) = \frac{t^2}{2} \quad E_3(p) = \frac{1}{p^3} \quad [\text{échelon d'accélération}]$$

En utilisant le théorème de la valeur finale sur la transformée de Laplace, il vient :

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)} \quad (1.78)$$

Si on considère un système bouclé à retour unitaire :

$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p) = E(p) - T(p)\varepsilon(p) \quad (1.79)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + T(p)}$$

Nous exprimons  $T(p)$  sous la forme :

$$T(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{N(p)}{D(p)} \quad (1.80)$$

avec  $p^\alpha$  : pôles en  $p = 0$  aussi appelés pôles à l'origine ou intégrateur

$$\implies T(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 \dots}{1 + b_1 p + b_2 p^2 \dots} \quad (1.81)$$

$$\text{si } p \rightarrow 0 \text{ alors } T(p) \approx \frac{K}{P^\alpha}$$

**1.7.3.2 Pour une entrée de type échelon de commande**

$$E_1(p) = \frac{1}{p} \implies \varepsilon(p) = \frac{1}{p(1+T(p))}$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1+T(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{K}{p^\alpha}} \quad (1.82)$$

▷ si  $\alpha = 0$  (système du premier ordre)

$$\boxed{\varepsilon_{1\infty}(t) = \frac{1}{1+K} = \frac{1}{Kp}} \leftarrow \text{constante d'erreur de position} \quad (1.83)$$

▷ si  $\alpha \geq 1 \rightarrow$  (présence d'au moins un pôle à l'origine)

$$\boxed{\varepsilon_{1\infty}(t) = 0} \leftarrow \text{erreur statique nulle : la sortie est asservie sur l'entrée} \quad (1.84)$$

**1.7.3.3 Pour une entrée de type rampe (commande en vitesse)**

$$E_2(p) = \frac{1}{p^2} \implies \varepsilon(p) = \frac{1}{p^2(1+T(p))}$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p(1+\frac{K}{p^\alpha})} \quad (1.85)$$

si  $\alpha = 0 \quad \varepsilon_{2\infty} = \infty$

$$\text{si } \alpha = 1 \quad \varepsilon_{2\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p(\frac{p+K}{p})} = \boxed{\frac{1}{K} = \frac{1}{Kv}} \text{ constante d'erreur en vitesse} \quad (1.86)$$

si  $\alpha \geq 2 \quad \varepsilon_{2\infty} = 0$

**1.7.3.4 Pour une commande en accélération**

$$\begin{cases} \alpha = 0 & \varepsilon_{3\infty} = \infty \\ \alpha = 1 & \varepsilon_{3\infty} = \infty \\ \alpha = 2 & \varepsilon_{3\infty} = \frac{1}{K} = \frac{1}{Ka} \\ \alpha \geq 3 & \varepsilon_{3\infty} = 0 \end{cases} \quad (1.87)$$

nombre de pôles à l'origine	0	1	2	$\alpha > 2$
$\varepsilon_p$ (position)	$\frac{1}{K_p}$	0	0	0
$\varepsilon_v$ (vitesse)	$\infty$	$\frac{1}{K_v}$	0	0
$\varepsilon_a$ (accélération)	$\infty$	$\infty$	$\frac{1}{K_a}$	0

**1.7.4 Conclusion**

On constate généralement que si le système en boucle ouverte possède  $\alpha$  pôles à l'origine son erreur stationnaire s'annule pour une entrée fonction du temps de degré  $(\alpha - 1)$ .

S'il en possède  $(\alpha - 1)$  alors cette erreur est constante et décroît pour des valeurs de  $K$  importantes (gain).

L'erreur stationnaire dépendra donc du nombre de pôles à l'origine de la fonction de transfert en boucle ouverte mais également du gain.

Notons le rôle important de ce gain à la fois dans le comportement statique et dynamique du système.



---

# **CORRECTION DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS À TEMPS INVARIANT**

---

La partie précédente est consacrée à l'étude des systèmes linéaires continus. Une fois que le mo-

dèle d'un système continu est connu, ce dernier peut être utilisé pour synthétiser des correcteurs continus. Cette partie ...

---



## 2.1 Problématique

L'étude précédente des systèmes asservis a mis en évidence l'intérêt d'introduire les systèmes à automatiser au sein d'une boucle d'asservissement pour :

- ▷ améliorer la précision statique et dynamique
- ▷ améliorer la stabilité (un système instable en BO peut devenir stable et BF)
- ▷ diminuer l'influence des perturbations
- ▷ diminuer l'influence des variations des paramètres du système

Cependant, même bouclés, il est parfois nécessaire de modifier le comportement global de ces processus de manière à répondre aux spécifications d'un cahier des charges. Les problèmes envisagés sont alors les suivants :

- ▷ comment diminuer les erreurs stationnaires du système (augmenter le gain en boucle ouverte) sans pour autant modifier le facteur de résonance (donc la bande passante) ?
- ▷ comment augmenter la bande passante sans modifier le facteur de résonance ?
- ▷ comment augmenter le degré de stabilité sans modifier le gain en boucle ouverte ?
- ▷ Comment diminuer le temps de réponse ?
- ▷ ...

Pour apporter une réponse à toutes ces questions, il est alors nécessaire d'introduire, dans la boucle d'asservissement, un système appelé **correcteur** ou **régulateur** agissant sur le signal d'erreur (cf fig. 2.1) Dans la

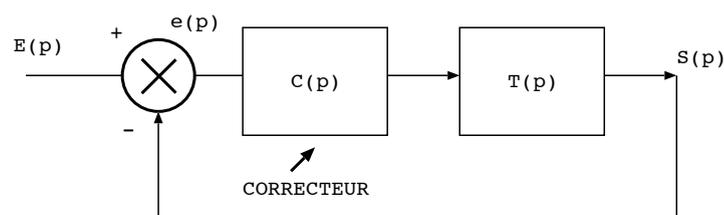


FIGURE 2.1 – Place du correcteur dans la boucle de commande

littérature, les correcteurs sont séparés en 2 classes :

1. les correcteurs spécifiques : ils sont conçus et réalisés pour une application particulière,
2. les correcteurs « classiques » : la structure de leur fonction de transfert est standard, seul les paramètres peuvent être modifiés pour satisfaire à l'application (ils sont réalisés et commercialisés, donc leur temps de mise en place est très court).

De nombreuses méthodes existent pour réaliser la synthèse des correcteurs. Dans le cadre de ce document, seule l'étude dans le plan de Black est abordée.

La régulation analogique est toujours très présente dans le milieu industriel. Il faut noter que les techniques modernes utilisent de plus en plus l'informatique et s'orientent vers une régulation numérique, abordée dans le prochain chapitre.

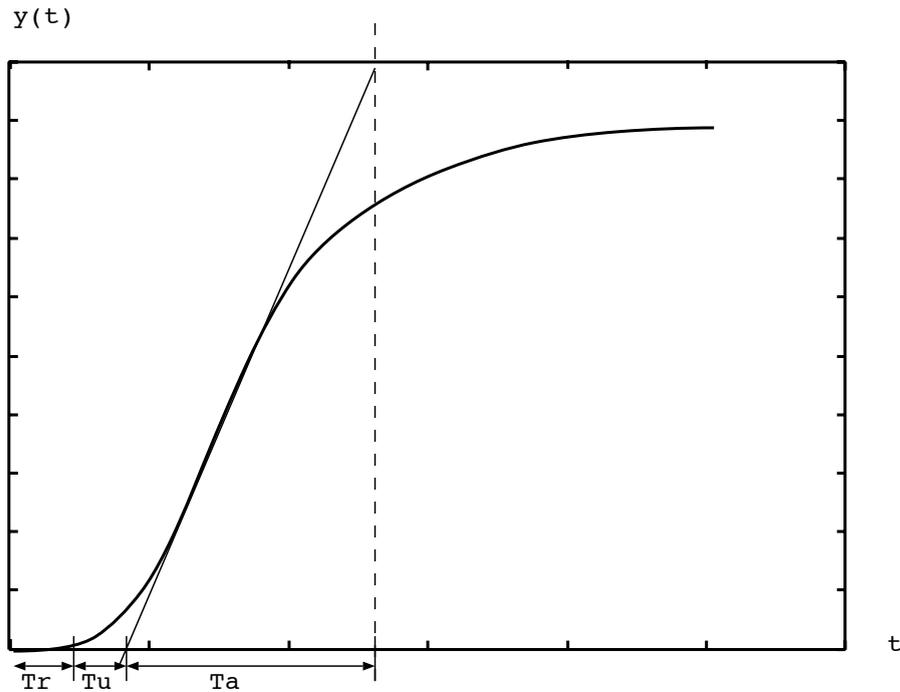


FIGURE 2.2 – Notion de réglabilité

## 2.2 Notion de réglabilité

Cette notion est principalement utilisée pour les systèmes présentant un retard pur important. La réponse indicielle d'un tel système est donnée figure 2.2

On distingue 3 phases :

1.  $T_R$  : temps de retard,
2.  $T_U$  : temps de décollement,
3.  $T_A$  : temps de montée.

$T_D = T_R + T_U$ , Délais nécessaire pour qu'une commande ait une action significative.

On appelle réglabilité le rapport  $\frac{T_A}{T_D}$  ; il se détermine expérimentalement. En pratique, un système sera d'autant plus facile à réguler que  $\frac{T_A}{T_D}$  sera grand :

1. Réglabilité élevée :  $\frac{T_A}{T_D} > 10$ . Le système réagit dès qu'on lui applique une consigne, il est très facile à réguler.
2. Réglabilité faible :  $\frac{T_A}{T_D} < 4$ . Le système est en limite de commandabilité. Il y a un délais important entre l'application d'une entrée et la réaction en sortie.

## 2.3 Correcteurs classiques

### 2.3.1 Résumé des objectifs

La conception d'un correcteur doit prendre en compte les objectifs suivants :

1. accroître la stabilité : éloigner processus du point d'instabilité. Pratiquement, un réglage de  $45^0$  pour la marge de phase et  $10db$  pour la marge de gain.
2. augmenter le gain du système en boucle ouverte, du côté des basses fréquences, pour augmenter la précision statique.
3. augmenter la bande passante pour diminuer le temps de réponse (glissement des fréquences élevées vers les gains importants)
4. provoquer une avance de phase en fréquences moyennes pour aider la stabilisation et diminuer les distorsions

### 2.3.2 Définition des actions proportionnelle, intégrale et dérivée

**Action proportionnelle** Le signal de commande est proportionnel au signal d'erreur.  $C(p) = k$  (translation verticale dans le plan de Black)

**Action Intégrale** C'est une action en régime permanent et en basses fréquences.  $C(p) = \frac{1}{\tau_i P}$

**Action dérivée** C'est une action en régime dynamique et en hautes fréquences.  $C(p) = \tau_d P$ .

**Remarque :** Les actions intégrale et dérivée ne s'emploient jamais seules, mais toujours associées à une action proportionnelle.

### 2.3.3 Régulateur à action proportionnelle

Le correcteur proportionnel est le plus simple des correcteur. Il s'agit de modifier la consigne à appliquer au système asservi en d'amplifiant ou en atténuant le signal d'erreur. Son expression est :

$$C(p) = k \quad (2.1)$$

où  $k$  est un gain constant positif. Dans le diagramme de Black, l'influence de ce correcteur se traduit par une translation verticale du lieu de Black. Si la valeur de  $k$  est inférieure à 1, le signal est atténué et le lieu de black est translaté vers le bas. Dans un cas général, cela traduit une augmentation de la robustesse du signal et une détérioration de son erreur statique. Si la valeur de  $k$  est supérieure à 1, le signal est amplifié et le lieu de black est translaté vers le haut. Dans le cas général, cela traduit une diminution de la robustesse du système et une amélioration de son erreur statique. La figure 2.3.3 montre l'effet d'un correcteur proportionnel sur le lieu de Black.

### 2.3.4 Correcteur proportionnel dérivé

La forme théorique de ce correcteur est :

$$C(p) = k(1 + \tau_d.p) \quad (2.2)$$

Comme l'effet de l'action proportionnelle a été vu ci-dessus, posons  $k = 1$ . Ce type de correcteur provoque un accroissement de gain et de phase vers les fréquences élevées. La figure 2.3.4 montre cet effet sur le lieu de Black

Le but de ce correcteur est d'augmenter la marge de gain, et, ainsi, d'accroître la stabilité du système. Pour qu'il fonctionne correctement, il doit être correctement réglé :

$$\frac{1}{\tau_d} < \omega_R \quad (2.3)$$

où  $\omega_R$  est la pulsation de résonance du système. Si la marge de phase est augmentée, il est possible de jouer sur le gain  $k$  pour améliorer le temps de réponse et la précision du système.

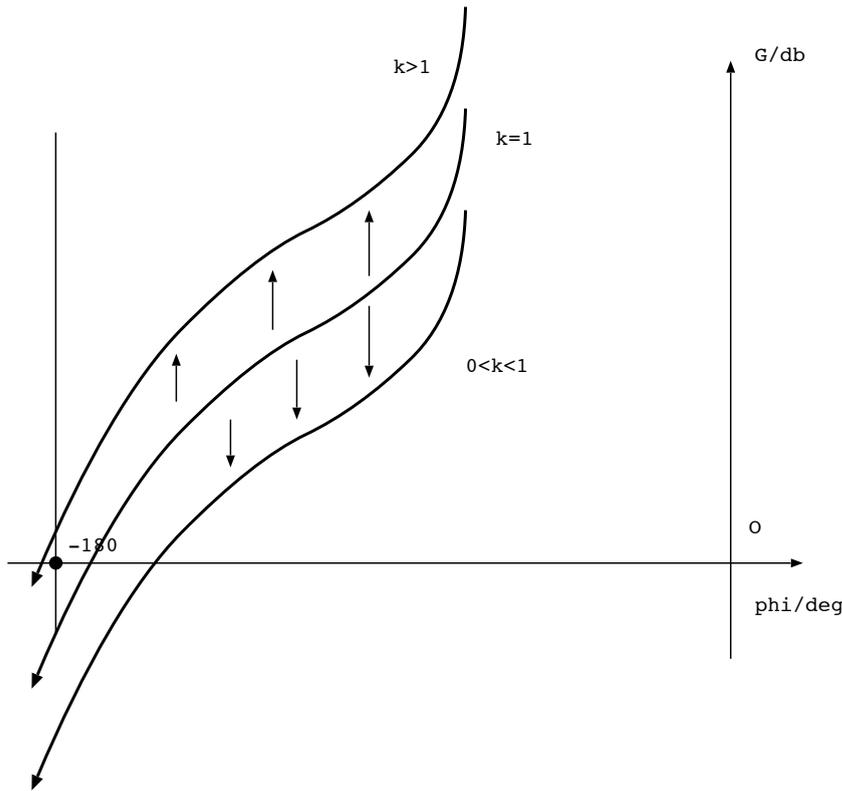


FIGURE 2.3 – Action proportionnelle

### 2.3.5 Correcteur à avance de phase

Le correcteur proportionnel dérivé n'est pas réalisable physiquement. Un correcteur à avance de phase est alors utilisé pour produire un effet semblable dans une gamme de fréquence importante. Son expression est la suivante :

$$C(p) = \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}, \quad a > 1 \tag{2.4}$$

L'effet de ce correcteur dans le diagramme de Black est représenté sur la figure 2.3.5.

Un réglage correct de ce correcteur est indispensable pour le bon fonctionnement du système asservi. Un mauvais réglage peut avoir un effet déstabilisant sur le système.

De plus, il convient de remarquer que le gain du système est amplifié pour les très hautes fréquences. Il en résulte qu'il faut limiter le gain  $a$  (souvent à 10) pour éviter une déstabilisation lors des régimes transitoires.

### 2.3.6 Correcteur à action proportionnelle et intégrale

Le correcteur à action proportionnelle et intégrale est utilisé pour augmenter la précision statique. Son expression est la suivante :

$$C(p) = 1 + \frac{1}{\tau_i p} = \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p} \tag{2.5}$$

La figure 2.3.6 montre l'effet de ce correcteur sur le lieu de Black.

On remarque que l'influence du correcteur proportionnel intégrale apparaît uniquement en basse fréquence. Il est important, pour avoir un réglage satisfaisant, de respecter la condition  $\frac{1}{\tau_i} < \omega_R$ . Dans ce cas, ni la pulsation de résonance, ni le facteur de résonance ne sont modifiés. La précision dynamique du système reste donc inchangée.

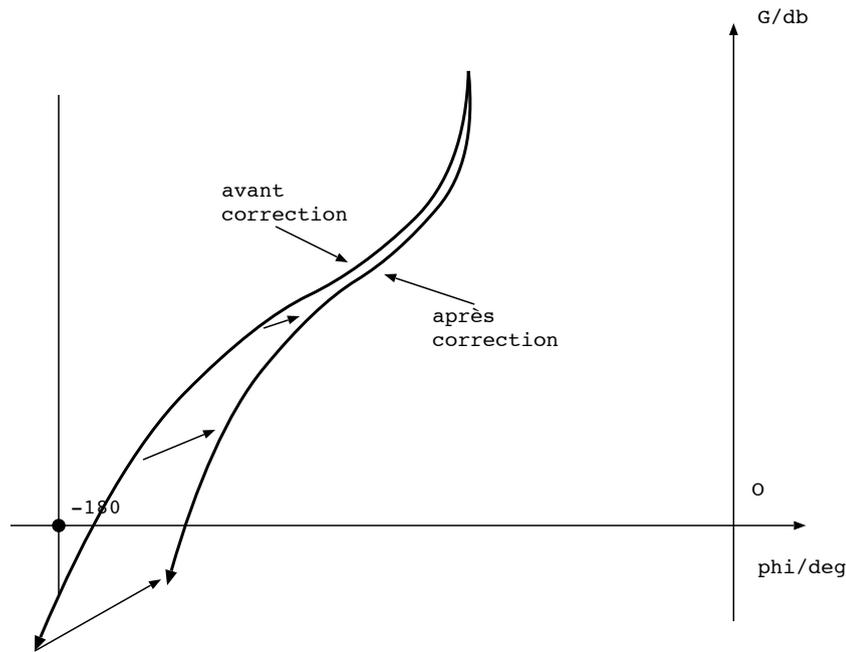


FIGURE 2.4 – Action proportionnelle et dérivée

### 2.3.7 Correcteur à retard de phase

Le correcteur à retard de phase est une approche du correcteur Proportionnel Intégral. Sa transmittance est la suivante :

$$C(p) = \frac{1 + \tau p}{1 + b\tau p}, \quad b > 1 \quad (2.6)$$

$C(p)$  s'écrit également :

$$C(p) = k' \frac{1 + a\tau'p}{1 + \tau'p}, \quad a < 1 \quad (2.7)$$

On retrouve une expression similaire à celle de l'équation (2.4). Il est donc possible, à partir de ce type de réseau, de constituer, soit un correcteur à avance de phase ( $a > 1$ ), soit un correcteur à retard de phase ( $a < 1$ ). La figure 2.3.7 montre l'effet de ce correcteur sur le lieu de Black. Les conditions de réglage du correcteur à retard de phase sont :

$$\frac{1}{\tau} < \omega_R \quad (2.8)$$

Ce type de correcteur permet d'augmenter la marge de phase tout en conservant un bon gain en basse fréquence. En d'autres termes, il est alors possible d'augmenter le gain statique (translation vers le haut du lieu de Black), c'est à dire la précision statique, tout en maintenant le même facteur de résonance et les mêmes marges de gain et de phase.

Lorsqu'il est mal réglé, le correcteur à retard de phase peut devenir déstabilisant pour le système.

### 2.3.8 Le correcteur à action proportionnelle, intégrale et dérivée

Le correcteur proportionnel intégral dérivé (noté PID), combine les trois actions correctrices. Son expression générale est :

$$C(p) = K_c \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) \quad (2.9)$$

$$C(p) = K \frac{1 + T_i p + T_i T_d p^2}{T_i p} \quad (2.10)$$

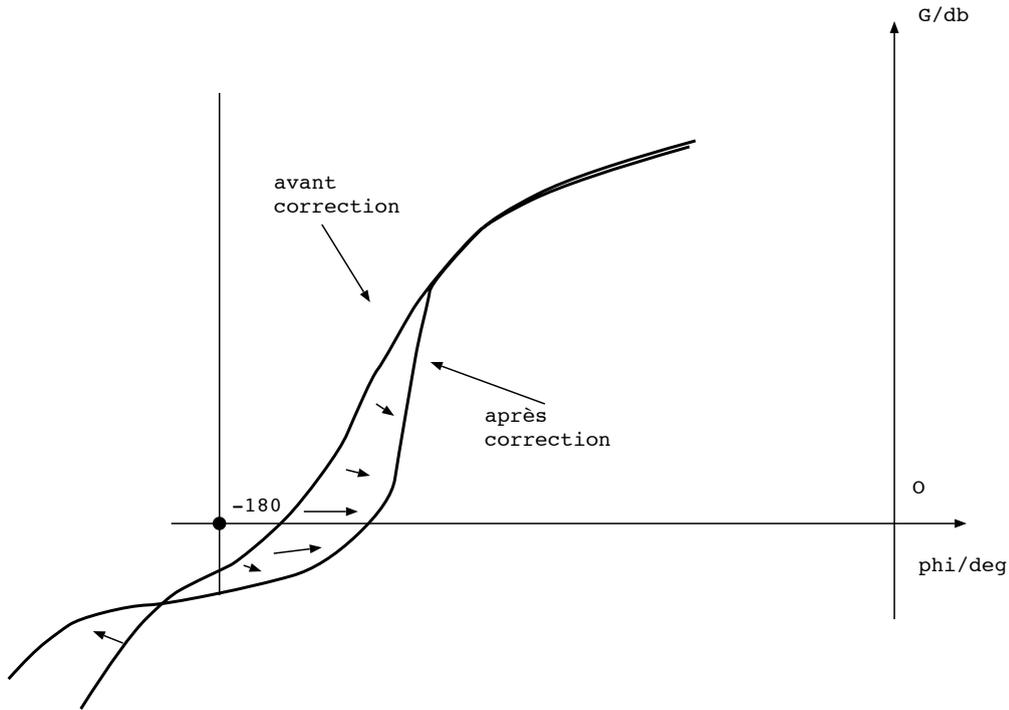


FIGURE 2.5 – Correcteur à avance de phase

avec :

- ▷  $K_c$ , gain proportionnel du correcteur,
- ▷  $T_i$ , contante de temps associée à l’action intégrale,
- ▷  $T_d$ , constante de temps associée à l’action dérivée.

Si  $T_i > 4T_d$  :

$$C(p) = \frac{(1 + T_1p)(1 + T_2p)}{T_i p} \tag{2.11}$$

avec  $T_1 + T_2 = T_i$  et  $T_1T_2 = T_iT_d$  Si  $T_i < 4T_d$  :

$$C(p) = \frac{1 + 2\xi T p + T^2 p^2}{T_i p} \tag{2.12}$$

Un réglage satisfaisant est obtenu pour  $1/T_i < \omega_r$  et  $1/T_d < \omega_r$

- ▷ Augmentation de la précision statique due à l’intégration,
- ▷ Accroissement du gain  $K$  pour un facteur  $Q$  fixé du à l’avance de phase ; d’où augmentation de la pulsation de résonance  $\omega_r$  et la pulsation de coupure  $\omega_c$ .

La figure ?? illustre l’effet d’un correcteur PID dans le plan de Black. Ce dernier a un effet de rotation du lieu en BO autour d’un point définit pour une pulsation appelée pulsation de pivot :

$$\omega_a = \frac{\sqrt{a}}{T_i}$$

- ▷ On pose :  $a = \frac{T_i}{T_d}$

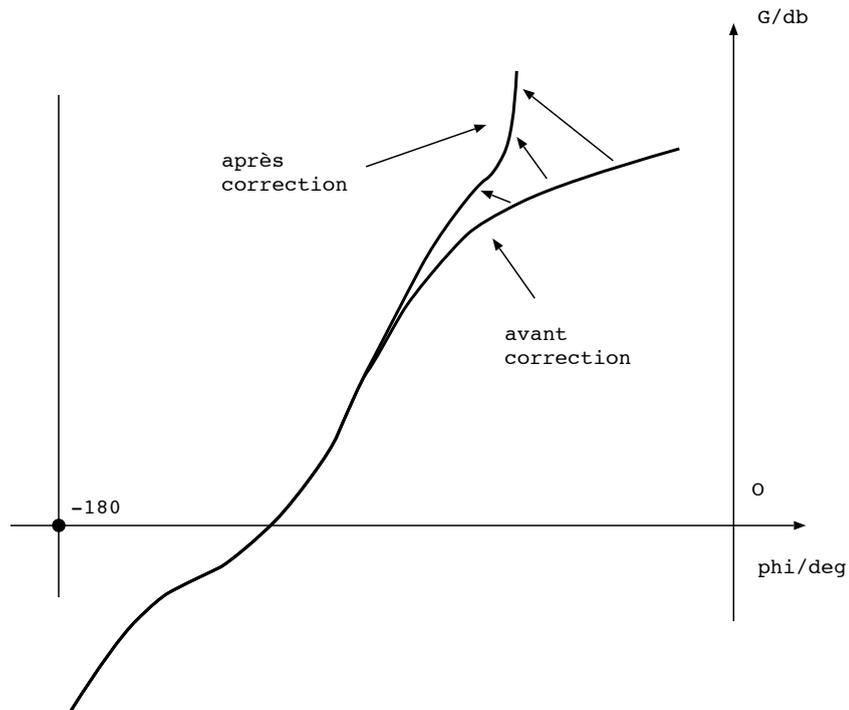


FIGURE 2.6 – Correcteur proportionnel intégral

- ▷ pour  $\omega < \frac{\sqrt{a}}{T_i}$ , le gain est accru : retard de phase,
- ▷ pour  $\omega > \frac{\sqrt{a}}{T_i}$ , le gain est réduit : avance de phase
- ▷ pour  $\omega = \frac{\sqrt{a}}{T_i}$ , invariance de gain et de phase (si  $K = 1$ )

La figure 2.3.8 présente le schéma électronique d'un correcteur PID, synthétisé autour d'un amplificateur opérationnel.

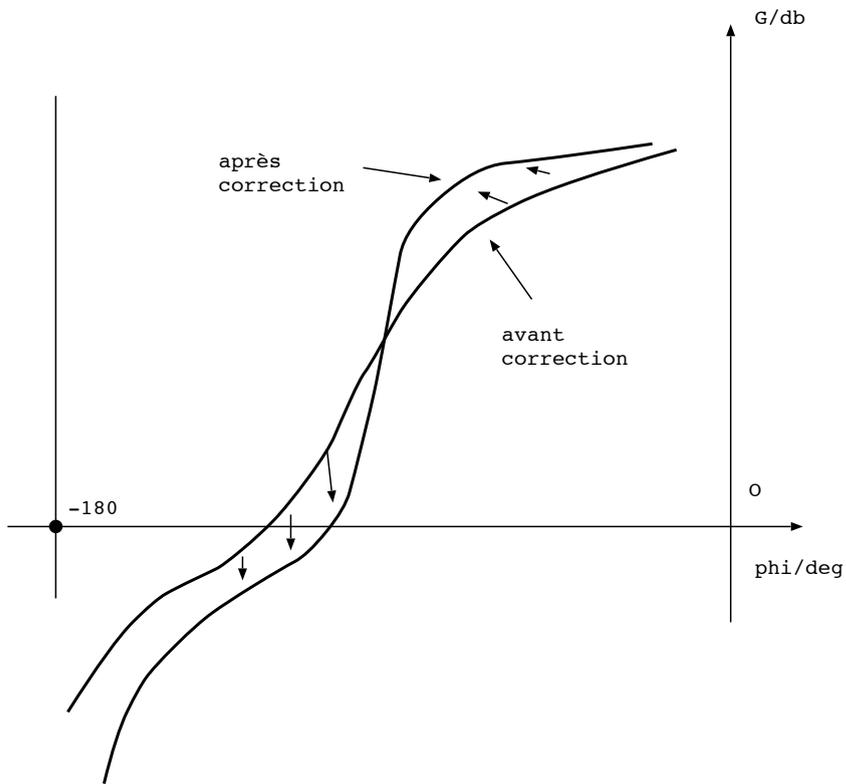


FIGURE 2.7 – Correcteur à retard de phase

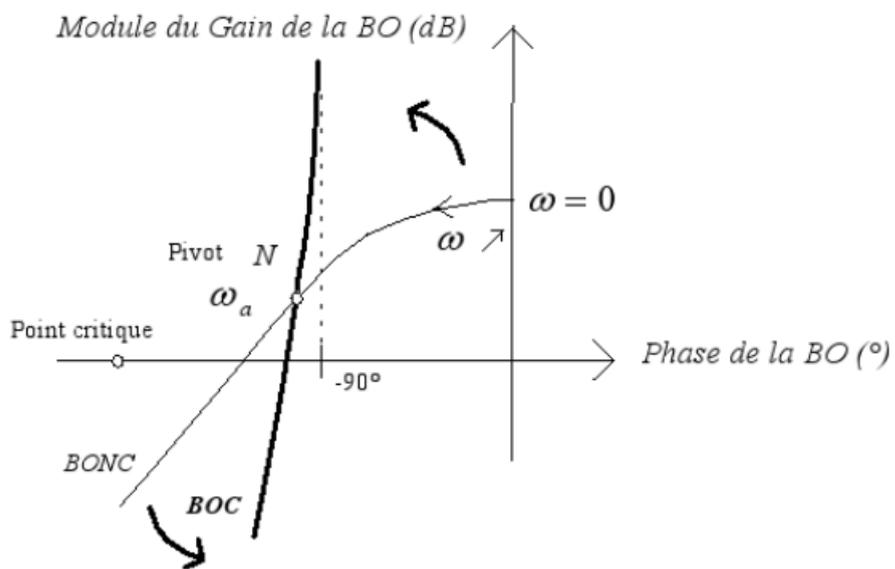


FIGURE 2.8 – Schéma d'un correcteur PID

---

# ÉTUDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES ÉCHANTILLONNÉS

---

L'évolution actuelle des systèmes automatiques fait une part de plus en plus importante aux systèmes discrets. Les correcteurs numériques offrent de nombreux avantages tant d'un point de vue des perfor-

mances que de la flexibilité. Ce chapitre propose des outils de modélisation des systèmes échantillonnés. Il est un préalable nécessaire à la synthèse de correcteurs numériques, objet du chapitre suivant.

---



### 3.1 Introduction

Nous avons vu dans les chapitres précédents l'analyse et la régulation d'un processus analogique. Les correcteurs associés à de tels systèmes sont généralement câblés.

Une évolution toute logique de l'automatisme est d'intégrer un ordinateur numérique dans la boucle. Cette interaction n'est pas sans conséquence sur l'approche théorique car il est alors nécessaire d'utiliser des outils propres aux signaux discrets. Dans l'exemple (a) de la figure 3.1, l'ensemble des signaux est numérique. Le

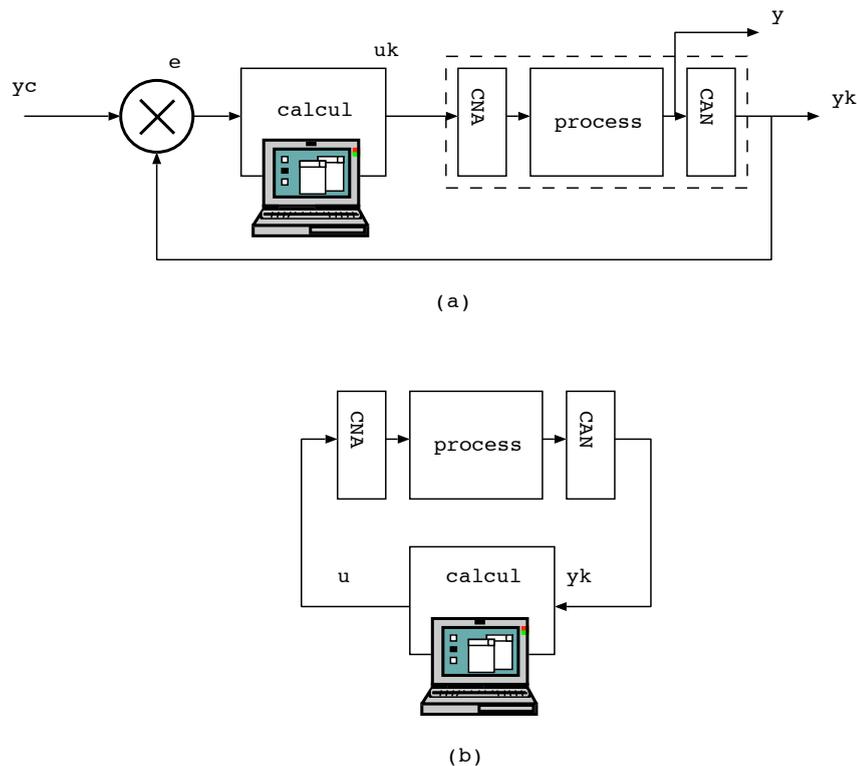


FIGURE 3.1 – Exemples de systèmes numériques

calculateur est positionné à la place du correcteur. Sur l'exemple (b), on parle de boucle tout numérique. Le calculateur gère tous les signaux (comparateur, chaîne de retour...).

#### Remarque sur la nature du processus à réguler

La nature continue du processus à réguler (moteur, vanne, enceinte thermique,...) impose une commande de type analogique. Le passage des informations discrètes de commande depuis l'ordinateur jusqu'au processus s'effectue par un bloqueur d'ordre zéro ( $B_0Z$ ) qui maintient les informations entre deux échantillons. **Par conséquent, une fonction de transfert du processus à réguler dans une boucle numérique inclura obligatoirement un bloqueur d'ordre zéro**

### 3.2 Rappels sur les signaux à temps discret

Tout comme les signaux continus, les signaux discrets sont une appellation simplifiée des 'signaux à temps discret'. La variable discrétisée est **le temps**.

$t \in \{t_1, \dots, t_n\}$  et le signal  $x(t)$  est défini uniquement pour ces instants. L'intervalle séparant deux valeurs de  $x(t)$  peut être variable. Cependant, pour la majorité des applications, celui-ci est fixe :

$$t_{n+1} - t_n = \Delta_t = T : \text{période d'échantillonnage}$$

L'introduction des signaux à temps discret est liée à l'utilisation sans cesse croissante des **calculateurs numériques**. Le signal discret  $x\{t_n\}$  est noté  $x_n$  ; la suite des valeurs  $\{x_n\}$  se dénomme également "séquence".

### 3.2.1 Description des signaux

La façon la plus simple de définir un signal discret  $x_n$  est de lui affecter un tableau de valeurs. Toutefois, il est possible de définir des échantillons par des relations du type :

$$x_n = a + b_n + c^n$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des paramètres qui définissent  $x_n$ .

### 3.2.2 Signaux fondamentaux

Aux équations linéaires à coefficients et aux signaux exponentiels dans le domaine continu, il est possible de faire correspondre des équations récurrentes à coefficients constants et des suites géométriques :

Continu	Discret
$\dot{x} - ax = 0, x(0) = c$	$x_{n+1} - ax_n = 0, x_0 = c$
$x(t) = ce^{at}$	$x_n = ca^n$

#### 3.2.2.1 Echelon unitaire $\Gamma_n$

$$\begin{cases} \Gamma_n = 0 \text{ pour } n < 0 \\ \Gamma_n = 1 \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$$

La représentation de ce signal est donnée figure 3.2.

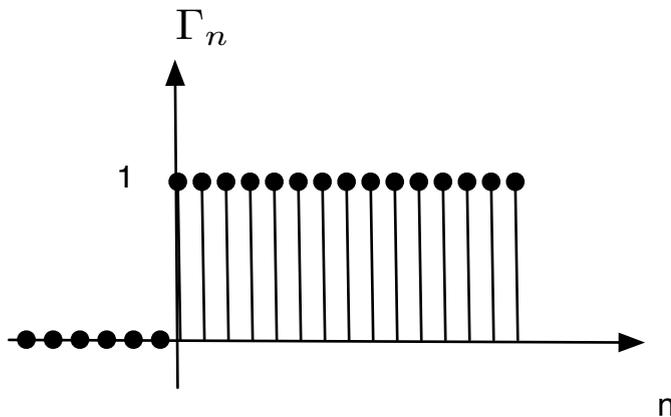


FIGURE 3.2 – Echelon unitaire  $\Gamma_n$

#### 3.2.2.2 Impulsion unitaire $\delta_n$

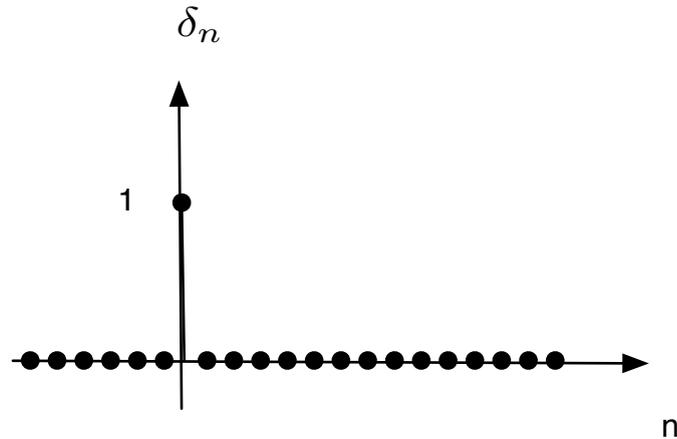
$$\begin{cases} \delta_n = 0 \text{ pour } n \neq 0 \\ \delta_n = 1 \text{ pour } n = 0 \end{cases}$$

La représentation de ce signal est donnée figure 3.3.

Un signal discret peut s'écrire comme une somme d'impulsions de dirac retardées :

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot \delta_{n-k} \tag{3.1}$$

**Remarque :** On travaillera souvent pour des signaux causaux (définis uniquement pour  $n > 0$ )

FIGURE 3.3 – Impulsion unitaire  $\delta_n$ 

### 3.2.3 Outil mathématique pour les signaux discrets : la transformée en $Z$

L'outil mathématique d'analyse des signaux continus est la transformée de Laplace :

$$X(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-pt} dt ; p : \text{variable complexe} \quad (3.2)$$

Un outil analogue a été développé pour les signaux discrets : la transformée en  $Z$  qui associe à une suite  $\{x_n\}$  une fonction  $X(z)$  de variable complexe :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} \quad (3.3)$$

L'existence de la transformée en  $Z$  est liée à la convergence de la série.

Nous travaillons avec des signaux discrets où  $x_n = 0$  si  $n < 0$ . La formule de la transformée en  $Z$  devient alors :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \quad (3.4)$$

**Exemple :** calcul de la transformée en  $Z$  de  $x(t) = e^{-at}$  :

$$x(nT) = e^{-anT} = (e^{-aT})^n = A^n$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{z}\right)^n = 1 + \frac{A}{z} + \left(\frac{A}{z}\right)^2 + \dots + \left(\frac{A}{z}\right)^n$$

C'est une suite géométrique de raison  $\frac{A}{z}$  D'où :

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{A}{z}} = \frac{z}{z - A} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

Le plus souvent, le calcul de la transformée en  $z$  peut s'effectuer en utilisant une table de conversion  $x(t) \rightarrow X(p)$  pour chaque sous-élément de  $x(t)$ .

### 3.2.4 propriétés de la transformée en $Z$

Tout comme la transformée de Laplace, la transformée en  $Z$  possède certaines propriétés remarquables.

**3.2.4.1 Linéarité**

$$Z[a.x_m + b.y_m] = a.X(z) + b.Y(z) \tag{3.5}$$

avec  $a, b \in \mathbb{R}$

**3.2.4.2 Convolution**

Soit  $\{c_m\} = \{x_n * y_n\}$  : produit de convolution tel que  $c_m = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m \cdot y_{n-m}$

$$Z[c] = X(z) \cdot Y(z)$$

**3.2.4.3 Avance/retard**

La figure 3.4 illustre cette propriété :

$$f : k \rightarrow f(k)$$

$$g : k \rightarrow g(k) = f(k - k_0)$$

les fonctions  $f$  et  $g$  sont causales ( $f, g(k) = 0$  si  $k < 0$ ).

$$G(z) = z^{-k_0} F(z) \tag{3.6}$$

On en déduit :

$$Z(x_{n+1}) = z.X(z) \tag{3.7}$$

$$Z(x_{n-1}) = z^{-1}.X(z) \tag{3.8}$$

Cette relation est très importante car elle permet de calculer la transformée en  $Z$  d'une fonction très simplement si elle est exprimée sous forme récurrente.

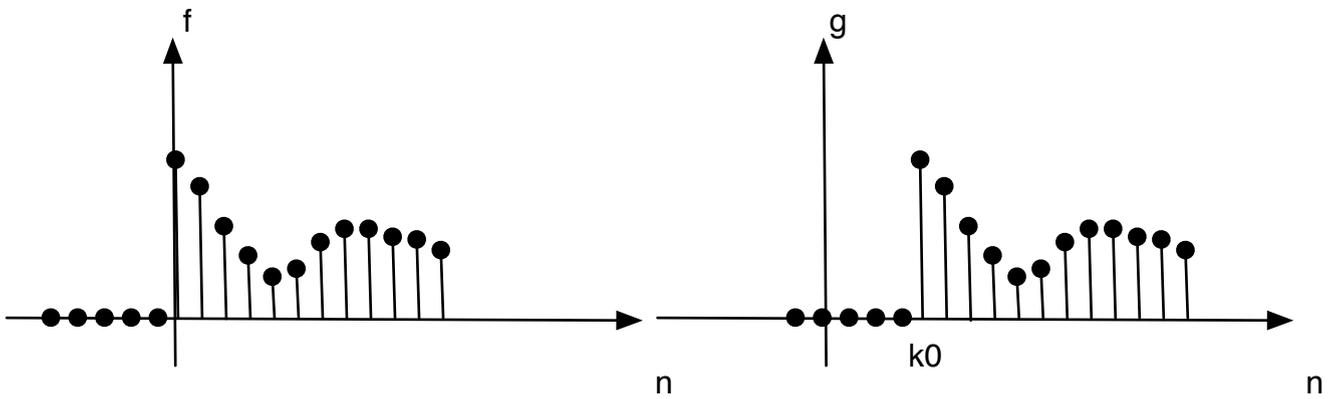


FIGURE 3.4 – Illustration du théorème d'avance retard

**3.2.4.4 Somme**

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{z \rightarrow 1} X(z) \tag{3.9}$$

**3.2.4.5 Théorème de la valeur finale**

$$x_{+\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z) \tag{3.10}$$

### 3.2.4.6 Théorème de la valeur initiale

$$x_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (3.11)$$

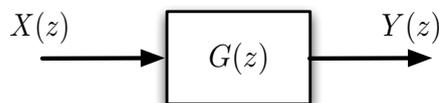
### 3.2.5 Fonction inverse $TZ^{-1}$

Plusieurs méthodes sont envisageables pour retrouver une expression temporelle du signal  $x_n(t)$  :

- ▷ Il est possible de calculer l'intégrale de transformation inverse par la méthode des résidus (non traité dans ce cours).
- ▷ Une méthode plus pratique consiste à exprimer  $X(z)$  sous la forme d'une série  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot z^{-n}$  par une division polynomiale. Le passage à  $x_n(t)$  est alors immédiat grâce au théorème avance/retard.
- ▷ Une troisième méthode consiste à décomposer l'expression de  $X(z)$  sous forme d'éléments simples (pôles+résidus), et d'utiliser les tables inverses.

### 3.2.6 Equations récurrentes $\Leftrightarrow TZ$

Soit le système suivant :



avec  $G(z) = \frac{0,5 \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0,5 \cdot z^{-2}}$ .

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \frac{0,5 \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0,5 \cdot z^{-2}}$$

$$Y(z)(1 - z^{-1} + 0,5 \cdot z^{-2}) = 0,5 \cdot z^{-1} \cdot X(z)$$

$$Y(z) - z^{-1} \cdot Y(z) + 0,5 \cdot z^{-2} \cdot Y(z) = 0,5 \cdot z^{-1} \cdot X(z)$$

$$y_n - y_{n-1} + 0,5 \cdot y_{n-2} = 0,5 \cdot x_{n-1}$$

On cherche  $y_{n+1}$  en fonction des valeurs précédentes :

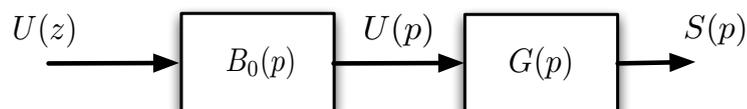
$$y_{n+1} = y_n - 0,5 \cdot y_{n-1} + 0,5 \cdot x_n$$

On obtient l'expression de l'échantillon  $y_{n+1}$  en fonction de la nouvelle entrée  $x_n$  et du passé du système matérialisé par les valeurs  $y_n$  et  $y_{n-1}$ .

On note alors l'intérêt de la  $TZ$  pour la programmation numérique des asservissements. En effet, ses équations sous forme récurrentes sont très faciles à programmer.

## 3.3 Fonction de transfert, stabilité et performances

### 3.3.1 Fonction de transfert d'un processus muni d'un bloqueur d'ordre zéro ( $B_0Z$ )



**Analyse du  $B_0Z$**  Son rôle est de maintenir la valeur de l'échantillon jusqu'à la commande suivante. Sa fonction de transfert est la suivante :

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-\Delta p}}{p} \quad (3.12)$$

Calculons la transformée en  $Z$  de  $B_0(p).F(p)$  :

$$\begin{aligned} Z[B_0(p).F(p)] &= Z \left[ \frac{F(p)}{p} \right] - \left[ \frac{F(p)}{p}.e^{-\Delta p} \right] \\ G(z) &= (1 - z^{-1}).Z \left[ \frac{F(p)}{p} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3.3.2 Transformée en $Z$ modifiée (étendue)

La transformée en  $Z$  permet de connaître et de contrôler un processus aux instants d'échantillonnage. Il ne nous renseigne pas sur l'état du process aux instants intermédiaires. On introduit alors la transformée en  $Z$  modifiée ( $T(z, m)$ ) qui pour  $m \in \{0; 1\}$  introduit un retard sur l'échantillonnage et permet de voir le comportement entre 2 échantillons. La formule générale est la suivante :

$$G(z, m) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k + m)z^{-k} \quad (3.14)$$

Il existe des tables de transformée en  $Z$  modifiées.

### 3.3.3 Stabilité des systèmes dans le plan $Z$

Tout comme pour les systèmes continus, **les pôles caractérisent la dynamique du processus**. Un système est dit stable s'il s'amortit dans le temps lorsque l'on applique une impulsion de dirac à l'entrée.

**Définition : un système numérique n'est stable que si tout ses pôles sont à l'intérieur du cercle unitaire. Il est d'autant plus stable que les pôles sont à l'intérieur.**

Lorsque les pôles d'un système ne peuvent pas être extraits de manière simple, la calcul de la stabilité s'effectue à l'aide d'un critère algébrique, par exemple le critère de Jury.

### 3.3.4 Critère de Jury

Le critère de jury permet de savoir si les racines d'un polynôme sont de module inférieur à 1. Si le polynôme étudié est l'équation caractéristique d'un système asservi, ce critère informe sur la stabilité du système. La forme de ce critère est définie pour un polynôme de degrés quelconque. Dans le cadre de ce cours, seuls le cas des polynômes d'ordre 2 et 3 est présenté :

#### Cas d'un système de degré 2

$$F(z) = a_2.z^2 + a_1.z + a_0,$$

avec  $a_2 > 0$ .  $F(z)$  admet des zéros de module inférieur à un ( $|Z_0| < 1$ ) si :

1.  $|a_0| < a_2$
2.  $F(1) > 0$
3.  $F(-1) > 0$

### Cas d'un système de degré 3

$$F(z) = a_3.z^3 + a_2.z^2 + a_1.z + a_0,$$

avec  $a_3 > 0$ .  $F(z)$  admet des zéros de module inférieur à un ( $|Z_0| < 1$ ) si :

1.  $|a_0| < a_3$
2.  $F(1) > 0$
3.  $F(-1) < 0$
4.  $a_0^2 - a_3^2 < a_0a_2 - a_1a_3$

### 3.3.5 Forme standard de $F(z)$

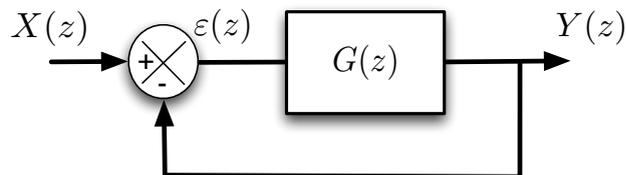
La représentation de  $F(z)$  sous une forme standard nous renseigne rapidement sur le nombre de zéros, pôles, avance ou retard, phénomène d'intégration du système :

$$F(z) = \frac{\begin{array}{c} \text{Gain} \\ \updownarrow \\ K \end{array}}{\begin{array}{c} \updownarrow \\ (z-1)^m \\ \updownarrow \\ \text{intégration} \end{array}} \cdot \begin{array}{c} \updownarrow \\ z^{-r} \\ \updownarrow \\ \text{retard} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \frac{N(z)}{D(z)} \\ \updownarrow \\ \text{sortie/entrée} \end{array} \quad (3.15)$$

Le gain  $K$  se détermine de la façon suivante :

$$K = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^m . F(z) \quad (3.16)$$

### 3.3.6 Précision



Soit  $\varepsilon(z)$  l'erreur, dans le plan en  $z$ , liée au système. Cherchons l'erreur  $\varepsilon_\infty(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(k)$  correspondante dans le domaine temporel en régime permanent stabilisé.

$$\varepsilon_\infty(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\varepsilon(z) : \text{Th. de la valeur finale}$$

### 3.3.7 La cadence d'échantillonnage

La période d'échantillonnage  $T$  ne doit pas être choisie aléatoirement. En effet :

- ▷ Il est inutile de perdre du temps à calculer les signaux de commande en choisissant  $T$  très petit.
- ▷  $T$  trop grand ne peut convenir non plus, il faut respecter le théorème de Shannon :  $\frac{1}{T} > 2$ . la fréquence la plus haute du signal à échantillonner.

Premier ordre	Deuxième ordre
$\frac{1}{1 + T_0 p}$	$\frac{1}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_n} + \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}$
$F_c = \frac{1}{2\pi T_0}$	$F_c \approx F_n = \frac{\omega_n}{2\pi} (\xi = 0.7)$
$\frac{T_0}{4} < T < T_0$	$0,25 < \Delta_{\omega_n} < 1,25$

### 3.4 Modèle numérique du second ordre

Le but de ce chapitre est de donner des outils pour calculer les paramètres d'un modèle numérique du second ordre, connaissant les caractéristiques du système que l'on souhaite. Soit :

$$F(p) = \frac{1}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_n} + \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2} \quad (3.17)$$

On échantillonne ce système muni d'un bloqueur d'ordre zero. Soit  $G(z)$  la fonction de transfert en  $z$  du système obtenu. Cette fonction peut s'écrire sous deux formes :

▷ Sous forme polynomiale

$$G(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} \quad (3.18)$$

▷ Sous la forme de pôles + zéros

$$G(z) = \frac{(z - z_0)}{(z - z_1)(z - z_1^*)} \quad (3.19)$$

Le but est de calculer les valeurs des différents coefficients ( $b_1, b_0, a_1$  et  $a_0$  dans le cas de la forme polynomiale et  $z_0$  et  $z_1$  dans le cas de la forme pôles + zéros) en fonction du modèle de comportement que l'on désire (Dépassement, temps de montée, amortissement). Nous utiliserons les propriétés suivantes, sans les redémontrer dans le cadre de ce cours.

$$\begin{aligned} \alpha &= e^{-\xi \omega_n \Delta} \\ \omega_p &= \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \\ a_0 &= \alpha^2 \\ a_1 &= -2\alpha \cdot \cos(\omega_p \cdot \Delta) \\ b_0 &= \alpha^2 + \alpha \left[ \xi \frac{\omega_n}{\omega_p} \sin(\omega_p \cdot \Delta) - \cos(\omega_p \cdot \Delta) \right] \\ b_1 &= 1 - \alpha \left[ \xi \frac{\omega_n}{\omega_p} \sin(\omega_p \cdot \Delta) + \cos(\omega_p \cdot \Delta) \right] \\ z_1, z_1^* &= \exp[(-\xi \omega_n (+/-) j \omega_p) \Delta] \\ z_0 &= -\frac{b_0}{b_1} \end{aligned}$$

---

# CORRECTION DES SYSTÈMES LINÉAIRES ÉCHANTILLONNÉS

---

L'évolution actuelle des systèmes automatiques fait une part de plus en plus importante aux systèmes discrets. Les correcteurs numériques offrent de nombreux avantages tant d'un point de vue des perfor-

mances que de la flexibilité. Le chapitre précédent présente des outils de modélisation des systèmes échantillonnés. Ce chapitre est consacré à la synthèse de correcteur échantillonnés.

---



## 4.1 Introduction

Ce chapitre présente des méthodes de synthèse de correcteurs numériques aux instants d'échantillonnage. Les systèmes concernés sont des systèmes linéaires à temps invariant.

## 4.2 Généralités

### 4.2.1 Factorisation et séparation d'une transmittance

#### 4.2.1.1 Factorisation

Soit une transmittance échantillonnée  $H(z^{-1})$ .  $H(z^{-1})$  est dite factorisée (on parle aussi de factorisation spectrale) si on peut l'écrire sous la forme :

$$H = H^+ . H^- \quad (4.1)$$

avec :

- ▷  $H^+$  : terme regroupant les pôles et les zéros stables de  $H$
- ▷  $H^-$  : terme regroupant les pôles et les zéros instables de  $H$

Si  $H$  s'identifie à  $H^+$ , la transmittance est dite positive. Elle correspond à un minimum de phase et à un système stable.

#### 4.2.1.2 Séparation

$H(z^{-1})$  est dite séparée si on peut l'écrire sous la forme :

$$H = H_+ + H_- \quad (4.2)$$

avec :

- ▷  $H_+$  : terme regroupant les pôles et les zéros stables de  $H$
- ▷  $H_-$  : terme regroupant les pôles et les zéros instables de  $H$

Souvent, il est pratique de décomposer une transmittance en pôles et zéros, stables et instables (pour des raisons de simplification de notations, le paramètre  $z$  est omis) :

$$H = \frac{H_N}{H_D} = \frac{H_N^+ . H_N^-}{H_D^+ . H_D^-} \quad (4.3)$$

avec  $H^+ = \frac{H_N^+}{H_D^+}$  et  $H^- = \frac{H_N^-}{H_D^-}$

### 4.2.2 Structure en cascade (boucle ouverte)

On considère le schéma de la figure 4.1. Soit  $H(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{E(z^{-1})}$  la transmittance du système en Boucle ouverte.

La structure en cascade est stable si  $H(z^{-1})$  peut être écrite de la forme :

$$H(z^{-1}) = \frac{H_N(z^{-1})}{H_D^+(z^{-1})} \quad (4.4)$$

Les deux conditions nécessaires et suffisantes qui permettent de vérifier (4.4) sont :

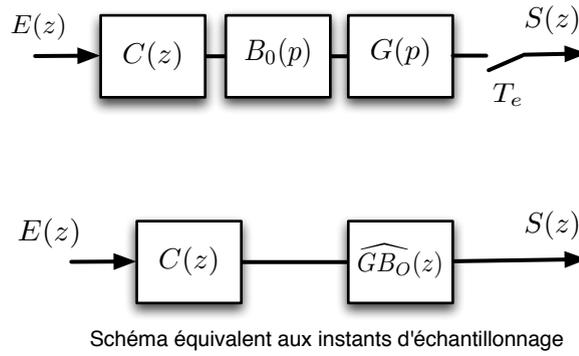


FIGURE 4.1 – Structure en boucle ouverte

1. La transmittance  $\widehat{GB}_o(z^{-1})$  est stable :

$$\widehat{GB}_o(z^{-1}) = \frac{GB_{oN}^+(z^{-1}) \cdot GB_{oN}^-(z^{-1})}{GB_{oD}^+(z^{-1})} \quad (4.5)$$

2. Le correcteur est stable et il a pour expression :

$$C(z^{-1}) = \frac{GB_{oD}^+(z^{-1}) \cdot B(z^{-1})}{GB_{oN}^+(z^{-1}) \cdot A(z^{-1})} \quad (4.6)$$

où  $B(z^{-1})$  et  $A(z^{-1})$  sont deux polynômes satisfaisants aux équations :

$$\begin{cases} GB_{oN}^-(z^{-1}) \cdot B(z^{-1}) = H_N(z^{-1}) \\ A(z^{-1}) = H_D^+(z^{-1}) \end{cases} \quad (4.7)$$

### 4.2.3 Système bouclé

La figure 4.2 représente un schéma d'asservissement classique d'un système par un correcteur numérique. Le système continu est échantillonné à la cadence  $T_e$ . Le bloc  $G(p)$  représente la fonction de transfert du système linéaire continu à asservir. On considère que cette fonction de transfert a été déterminée, soit par identification, soit par une modélisation physique du système. Le bloc  $C(z)$  représente la transmittance du correcteur. Enfin, le bloc  $B_0(p)$  est un bloqueur d'ordre zéro, qui maintient la valeur numérique fournie par  $C(z)$  entre deux échantillons. Il permet donc la reconstitution d'un signal continu (approximé à l'ordre 0) à partir d'un signal discret.

La transmittance de la boucle d'asservissement est donnée par :

$$H(z^{-1}) \doteq \frac{Y(z^{-1})}{E(z^{-1})} = \frac{C(z^{-1}) \cdot \widehat{GB}_o(z^{-1})}{1 + C(z^{-1}) \cdot \widehat{GB}_o(z^{-1})} = \frac{H_N(z^{-1})}{H_D^+(z^{-1})} \quad (4.8)$$

$H(z^{-1})$  définit la transmittance du système bouclé corrigé. C'est le modèle que l'on veut obtenir après correction. Comme il est naturel que le comportement à obtenir soit stable, le dénominateur de  $H(z^{-1})$  ne contient pas de partie instable.

La condition nécessaire et suffisante pour que le système bouclé soit stable, de transmittance  $H(z^{-1})$ , est que le correcteur ait pour expression :

$$C = \frac{\widehat{GB}_{oD}^+ \cdot B}{\widehat{GB}_{oN}^+ \cdot A} \quad (4.9)$$

avec  $A(z=0) \neq 0$ .  $B(z^{-1})$  et  $A(z^{-1})$  sont deux polynômes en  $(z^{-1})$ , qui possèdent les propriétés suivantes :

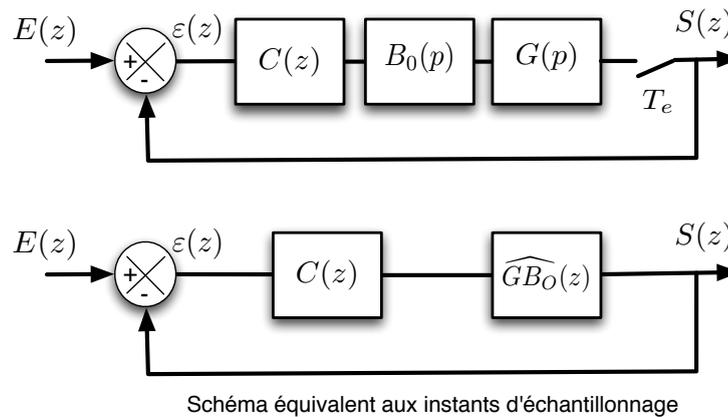


FIGURE 4.2 – Structure en boucle fermée

1.  $B(z^{-1})$  ne contient pas les pôles instables du système ( $\widehat{GB}_{oD}^-$ ),
2.  $A(z^{-1})$  ne contient pas les zéros instables du système ( $\widehat{GB}_{oN}^-$ ),
3.  $B(z^{-1})$  vérifie la relation :

$$\widehat{GB}_{oN}^- \cdot B = H_N$$

4.  $A$  et  $B$  vérifient la relation :

$$\widehat{GB}_{oN}^- \cdot B + \widehat{GB}_{oD}^- \cdot A = H_D^+$$

Les deux premières contraintes expriment le fait que **le correcteur ne doit pas compenser les pôles et les zéros instables du système**. De plus, les deux dernières relations se démontrent facilement en calculant l'expression de la transmittance globale de la boucle d'asservissement :

$$H = \frac{H_N}{H_D^+} = \frac{\widehat{GB}_{oN}^- \cdot B}{\widehat{GB}_{oN}^- \cdot B + \widehat{GB}_{oD}^- \cdot A} \quad (4.10)$$

L'équation 4.10 est fondamentale et elle permet, connaissant un modèle de système à atteindre et une structure de correcteurs, d'identifier les différents paramètres de ce dernier.

## 4.3 Synthèse de correcteurs numériques par la méthode des pôles dominants

### 4.3.1 Introduction

La synthèse d'un correcteur numérique par la méthode des pôles dominants, aussi appelée méthode de ZDAN, consiste à choisir, comme modèle à atteindre, un système d'ordre 2. Ainsi, le modèle pourra être spécifié sous la forme, par exemple, d'un temps de montée et d'un dépassement maximum. A partir de ces objectifs à atteindre, il est alors possible de calculer l'expression numérique du modèle, puis de proposer une forme de correcteur qui conduise aux performances souhaitées. Dans cette partie, on considère que la transmittance bloquée du système ( $\widehat{GB}_o(z^{-1})$ ) est connue, à la période d'échantillonnage  $T_e$ .

### 4.3.2 Description de la méthode

#### 4.3.2.1 Modèle à atteindre

Le modèle à atteindre est fixé par un cahier des charges, qui, lorsqu'il est complet, contient :

1. Des informations sur le comportement dynamique du modèle. Elles permettent de calculer son modèle numérique du second ordre. Ces informations peuvent être directement le coefficient d'amortissement et la pulsation propre. Il peut aussi s'agir de spécifications sur la réponse indicielle du système à obtenir, par exemple le temps de montée et le dépassement. Dans ce cas,  $\xi$  et  $\omega_n$  sont calculés à partir de ces valeurs. Le gain statique statique est généralement unitaire.
2. Des informations sur le comportement statique du modèle. Il s'agit des erreurs stationnaires. En fonction de l'ordre maximum pour lequel on désire une erreur stationnaire nulle, et du nombre d'intégrateurs déjà présents dans le système, ces informations permettent de déterminer le nombre d'intégrateurs présents dans le correcteur.

La dynamique du modèle est fixée par la position de ses pôles. Dans le cas d'un modèle d'ordre 2, ces derniers sont deux complexes conjugués obtenus par la relation suivante :

$$Z_1, Z_1^* = \exp[-\xi\omega_n T_e \pm j\sqrt{1 - \xi^2}\omega_n \cdot T_e] \quad (4.11)$$

Le dénominateur de  $H(z^{-1}) = \frac{H_N(z^{-1})}{H_D^+(z^{-1})}$  s'exprime uniquement en fonction de  $Z_1$  et  $Z_1^*$  par la relation :

$$H_D^+(z^{-1}) = (1 - Z_1 z^{-1})(1 - Z_1^* z^{-1}) = 1 - (Z_1 + Z_1^*)z^{-1} + Z_1 Z_1^* z^{-2} \quad (4.12)$$

#### 4.3.2.2 Structure du correcteur

La structure générale du correcteur est donnée par l'équation 4.9 page 56, rapellée ci-dessous :

$$C(z^{-1}) = \frac{\widehat{GB}_{oD}^+(z^{-1}) \cdot B(z^{-1})}{\widehat{GB}_{oN}^+(z^{-1}) \cdot A(z^{-1})}, \quad (4.13)$$

Le polynôme  $B(z^{-1})$  se décompose en deux parties :

$$B(z^{-1}) = K_c \cdot B'(z^{-1})$$

où  $K_c$  représente le gain associé au correcteur.  $B'(z^{-1})$  est un polynôme en  $z$ . Le polynôme  $A(z^{-1})$  se décompose également en deux parties :

$$A(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^r \cdot A'(z^{-1})$$

où  $r$  est le nombre d'intégrateurs à ajouter au système afin d'obtenir les performances statiques fixées par le cahier des charges.  $A'(z^{-1})$  est un polynôme en  $(z^{-1})$ .

#### 4.3.2.3 Calcul des paramètres

Le gain  $K_c$  et les paramètres des polynômes  $A'(z^{-1})$  et  $B'(z^{-1})$  sont calculés en identifiant l'expression du dénominateur du système corrigé avec le modèle à obtenir :

$$\widehat{GB}_{oN}^-(z^{-1}) \cdot B(z^{-1}) + \widehat{GB}_{oD}^-(z^{-1}) \cdot A(z^{-1}) = 1 - (Z_1 + Z_1^*)z^{-1} + Z_1 Z_1^* z^{-2} \quad (4.14)$$

Cette relation est de degré 2. Cette contrainte limite le choix des degrés de  $A'(z^{-1})$  et de  $B'(z^{-1})$ . De plus, la mise en équation de cette relation (identification de chaque degré du polynôme) conduit à un système de deux équations. Cela permet de résoudre un problème à deux inconnues. Dans la pratique, on choisit souvent  $B'(z^{-1}) = 1$  et  $A'(z^{-1}) = 1 + A_0 z^{-1}$ . Lorsque l'ordre du système impose  $A'(z^{-1}) = 1$ , il est possible de choisir  $B'(z^{-1}) = 1 + B_0 z^{-1}$ . Une autre solution peut aussi être de fixer une contrainte sur les zéros du système à obtenir (numérateur de  $H(z^{-1})$ ), ce qui fixe le paramètre  $B_0$ .

### 4.3.3 Exemple

On souhaite réguler un processus dont la fonction de transfert est donnée par :

$$\widehat{GB}_o(z^{-1}) = \frac{0.26z^{-1}}{1 - 0.74z^{-1}}$$

Les performances du modèle à obtenir sont les suivantes :

1. un dépassement de la réponse indicielle négligeable,
2. un temps de montée de la réponse indicielle  $t_m = 225ms$ ,
3. une erreur de position nulle (ordre 1) nulle.

La période d'échantillonnage est de  $T_e = 0.075s$

#### 4.3.3.1 Calcul du modèle

Le modèle est donné par  $H(z^{-1}) = \frac{N_H(z^{-1})}{D_H^+(z^{-1})}$ . La dynamique du système est fixée par son dénominateur, soit  $D_H^+(z^{-1})$ , composé de deux racines complexes conjuguées obtenues par la relation :

$$Z_1, Z_1^* = \exp[-\xi\omega_n T_e \pm j\sqrt{1 - \xi^2}\omega_n T_e] \quad (4.15)$$

Le dépassement de la réponse indicielle doit être faible. Or, le dépassement est directement lié au coefficient d'amortissement  $\xi$ . Le tableau 4.1 présente les relations entre la pulsation propre  $\omega_n$ , le coefficient d'amortissement  $\xi$  et les caractéristiques de la réponse indicielle.

Un faible dépassement (4.6%) est obtenu pour une valeur de  $\xi$  de 0.7. D'autre part, le cahier de charges impose un temps de montée  $t_m = 0.225s$ . La tableau des valeurs numériques fournit le produit  $\omega_n.t_m = 3.29$  pour  $\xi = 0.7$ . On en déduit :

$$\omega_n = 3.29/0.225 = 14.6rd/s$$

L'équation 4.15 permet de calculer les deux racines complexes conjuguées de  $H_D^+$  :

$$Z_1, Z_1^* = -0.3297 \pm j0.3274$$

$$Z_1 + Z_1^* = 0.6593 \text{ et } Z_1 * Z_1^* = 0.2159$$

On en déduit  $H_D^+$  :

$$H_D^+ = 1 - 0.6593z^{-1} + 0.216z^{-2}$$

#### 4.3.3.2 Structure du correcteur

Le correcteur utilisé a la structure suivante :

$$C(z^{-1}) = K_c \frac{\widehat{GB}_{oD}^+(z^{-1}).B'(z^{-1})}{(1 - z^{-1}).\widehat{GB}_{oN}^+(z^{-1}).A'(z^{-1})} = \frac{C_N(z^{-1})}{C_D(z^{-1})}$$

avec :

$$\widehat{GB}_{oD}^+(z^{-1}) = 1 - 0.74z^{-1} \text{ et } \widehat{GB}_{oN}^+(z^{-1}) = 1$$

Un intégrateur a été ajouté au dénominateur du correcteur pour satisfaire aux exigences statiques du cahier des charges (erreur de position nulle).  $A'(z^{-1})$  et  $B'(z^{-1})$  sont des polynômes en  $z^{-1}$ .

$\xi$	$\omega_0 t_m$	$\omega_0 t_{pic}$	$\omega_0 T_p$	$D\%$
0,1	1,68	3,16	6,31	72,92
0,15	1,74	3,18	6,36	62,09
0,2	1,81	3,21	6,41	52,66
0,25	1,88	3,24	6,49	44,43
0,3	1,97	3,29	6,59	37,23
0,35	2,06	3,35	6,71	30,92
0,4	2,16	3,43	6,86	25,38
0,45	2,28	3,52	7,04	20,53
0,5	2,42	3,63	7,26	16,3
0,55	2,58	3,76	7,52	12,63
0,6	2,77	3,93	7,85	9,48
0,65	3	4,13	8,27	6,81
0,7	3,29	4,4	8,8	4,6
0,75	3,66	4,75	9,5	2,84
0,8	4,16	5,24	10,47	1,52
0,85	4,91	5,96	11,93	0,63
0,9	6,17	7,21	14,41	0,15
0,95	9,04	10,06	20,12	0,01

TABLE 4.1 – Tableau des valeurs numériques d'un système d'ordre deux

### 4.3.3.3 Equation caractéristique

L'équation caractéristique du système est le dénominateur de la fonction de transfert du système bouclé corrigé, soit :

$$Eq(z^{-1}) = C_N(z^{-1}) \cdot \widehat{GB}_{oN} + C_D(z^{-1}) \cdot \widehat{GB}_{oD}(z^{-1})$$

Soit,

$$Eq(z^{-1}) = 0.26 \cdot K_c z^{-1} B'(z^{-1}) + (1 - z^{-1}) A'(z^{-1})$$

Cette équation caractéristique doit être identifiée avec le dénominateur du modèle :

$$Eq(z^{-1}) = H_D^+ = 1 - 0.659z^{-1} + 0.216z^{-2}$$

l'ordre du polynôme (2) fixe l'ordre des polynômes  $A'$  et  $B'$  :

$$A'(z^{-1}) = 1 + A_0 z^{-1} \text{ et } B'(z^{-1}) = 1 + B_0 z^{-1}$$

On en déduit l'expression de l'équation caractéristique :

$$Eq(z^{-1}) = 1 + (0.26K_c + A_0 - 1)z^{-1} + (0.26K_c B_0 - A_0)z^{-2}$$

L'identification des différents degrés de cette équation avec le modèle recherché conduit au système d'équation suivant :

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 0.26K_c + A_0 - 1 = -0.658 \\ 0.26K_c B_0 - A_0 = 0.215 \end{cases} \quad (4.16)$$

Il s'agit d'un système à 2 équations et 3 inconnues. Ce dernier n'est pas suffisamment contraint pour conduire à une seule solution. Il existe alors deux possibilités :

1. Une contrainte est ajoutée. Classiquement, cette dernière peut s'appliquer sur la valeur du zéro souhaité dans le modèle, qui règle l'avance de la commande, donc son dépassement indiciel.

2. Si aucune contrainte n'est ajoutée, un des paramètres est fixé. Il faut toutefois s'assurer que le correcteur obtenu reste alors causal (degrès du dénominateur supérieur ou égal au degrès du numérateur). Généralement, le coefficient  $B_0$  est choisi nul.

En posant  $B_0 = 0$  le système d'équations devient :

$$\begin{cases} 0.26K_c + A_0 - 1 = -0.658 \\ -A_0 = 0.215 \end{cases} \quad (4.17)$$

D'où les valeurs des paramètres du correcteur :

$$A_0 = -0.215 \text{ et } K_c = 2.14$$

L'expression du correcteur est alors :

$$C(z^{-1}) = 2.14 \frac{1 - 0.74z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.215z^{-1})}$$

La figure 4.3 montre le synoptique de simulation du système, aux instants d'échantillonnage, corrigé par la méthode de Zdan. La figure 4.4 montre l'évolution de l'erreur, de la commande, et de la sortie du système, pour

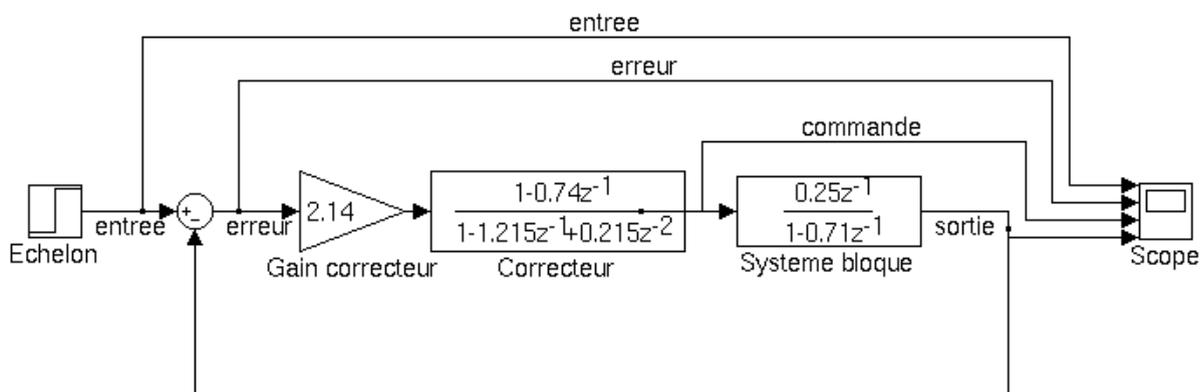


FIGURE 4.3 – Schéma de simulation Matlab Simulink du système corrigé

un signal d'entrée de type échelon. On observe que les performances statiques et dynamiques du système sont atteintes.

## 4.4 La structure générale des correcteurs numériques (structure RST)

### 4.4.1 Introduction

La régulation numérique offre une grande flexibilité dans la structure des correcteurs. La structure la plus générique est appelée structure RST. Elle est dite à deux degrés de liberté car elle permet de fixer des objectifs différents pour la poursuite et pour la régulation des process.

Après une étude générale de cette structure, nous présentons son utilisation pour la synthèses de correcteurs de type PID numériques, puis de type placement de pôles avec ou sans compensation des zéros.

### 4.4.2 Etude générale de la structure

Le schéma général de la structure RST est donné sur a figure 4.5 Quatre signaux d'entrée influencent le fonctionnement de cette structure :

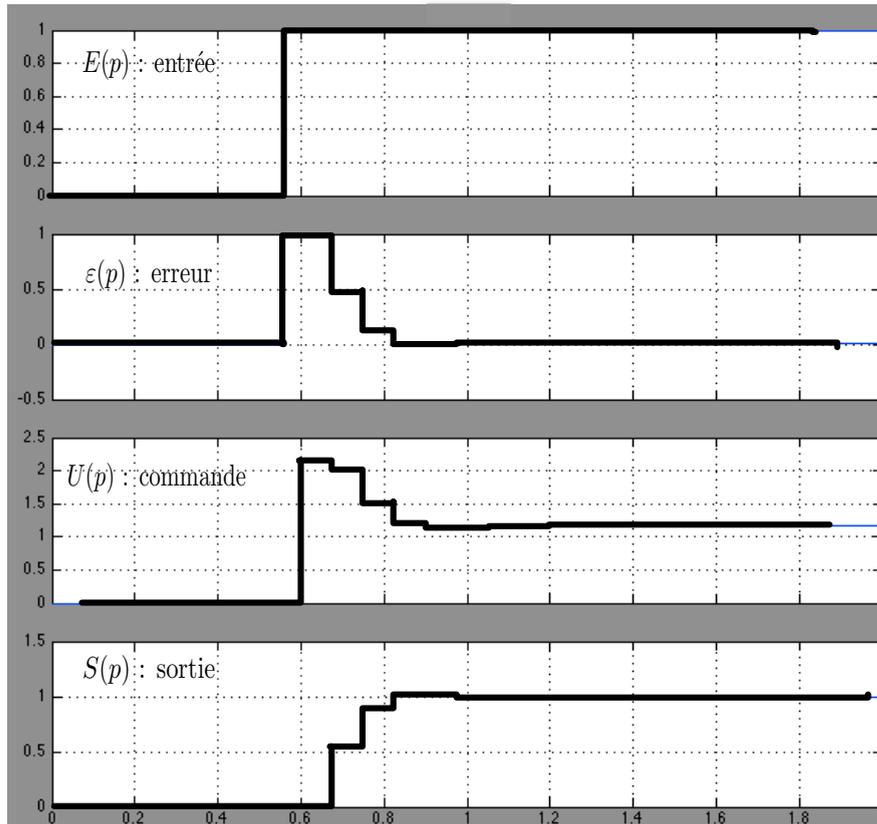


FIGURE 4.4 – Réponse à un échelon du système corrigé. Cette réponse a été calculée à l'aide du module Simulink de Matlab.

- ▷  $y^c(z)$  est la consigne que l'on applique en entrée du système,
- ▷  $W_v(z)$  est la perturbation agissant au niveau de la commande,
- ▷  $W_p(z)$  est la perturbation agissant au niveau de la sortie du procédé,
- ▷  $W_b(z)$  représente le bruit de mesure (généralement un bruit se situant dans les hautes fréquences),

L'expression de la sortie ( $y(z)$ ) du système en fonction de ces signaux peut se calculer en utilisant le théorème de décomposition.

La réaction du système devant une modification du signal de consigne est appelée comportement en poursuite. La réaction du système devant une modification d'un des trois signaux de perturbation est appelée comportement en régulation. La plupart des systèmes industriels ne possèdent pas les mêmes spécifications en poursuite et en régulation. Il en résulte que la dynamique du système doit être différente en poursuite et en régulation. Un choix judicieux du bloc  $T(z)$  (par exemple  $T(z) = \frac{B_m \cdot (AS + BR)}{A_m}$ ) permet d'obtenir une différence de dynamique entre les deux types de comportement.

## 4.5 Correcteurs de types PID numériques.

Les correcteurs PID, combinant les trois actions correctrices de base (proportionnelle, dérivée en intégrale), sont les plus populaires lorsqu'il s'agit de réguler un système simple. Dans le cas d'une structure correctrice numérique, il est également possible de synthétiser un tel correcteur. Les actions intégrale et dérivée sont alors approximées numériquement.

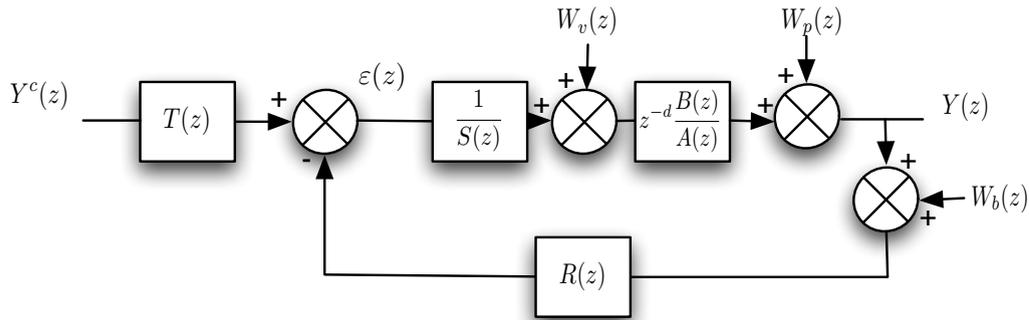


FIGURE 4.5 – Schéma général d'une structure RST

Ce type de correcteur s'utilisera pour des systèmes d'ordre inférieur ou égal à deux et avec peu de retard. Son implémentation s'appuiera sur une structure RST.

#### 4.5.1 Approximation des actions dérivée et intégrale

La transposition du correcteur PID en numérique nécessite d'approximer les opérations d'intégration et de dérivation par des calculs numériques. La figure 4.6 montre le principe de l'approximation de la dérivée d'un signal par un calcul numérique :

$$\frac{df(t)}{dt} \approx \frac{f(t) - f(t - T_e)}{T_e} \quad (4.18)$$

En exprimant cette relation sous la forme de sa transformée en  $z$ , on obtient :

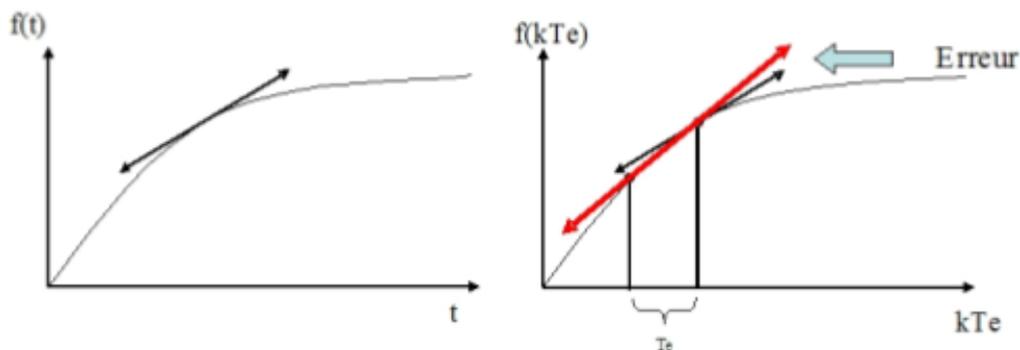


FIGURE 4.6 – Principe de l'approximation d'une dérivée par un opérateur numérique. La dérivée est approchée par le calcul suivant :  $\frac{df(t)}{dt} \approx \frac{f(t) - f(t - T_e)}{T_e}$

$$\mathcal{Z}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \frac{F(z) - z^{-1}F(z^{-1})}{T_e} = \frac{(1 - z^{-1})F(z)}{T_e} \quad (4.19)$$

On en déduit donc une approximation entre la dérivation dans le domaine de Laplace et en  $z$  :

$$p \longrightarrow \frac{(1 - z^{-1})}{T_e} \quad (4.20)$$

De la même manière, on peut en déduire une approximation entre l'intégration dans le domaine de Laplace et en  $z$  :

$$\frac{1}{p} \longrightarrow \frac{T_e}{(1 - z^{-1})} \quad (4.21)$$

### 4.5.2 Structure du PID numérique

Un correcteur PID continu, peut s'écrire :

$$C_{PID}(p) = K \left( 1 + \frac{1}{\tau_i p} + \frac{\tau_d p}{1 + (\tau_d/N)p} \right) \quad (4.22)$$

avec les paramètres suivants :

- ▷  $K$ , gain proportionnel du correcteur,
- ▷  $\tau_i$  constante de temps de l'action intégrale,
- ▷  $\tau_d$  constante de temps de l'action dérivée,
- ▷  $N$ , paramètre de réglage de l'effet de filtrage de l'action dérivée<sup>1</sup>.

La variable de Laplace  $p$  peut être remplacée par l'approximation 4.20, ce qui conduit à la forme numérique du correcteur PID suivante :

$$C(Z) = K \left[ 1 + \frac{T_e}{\tau_i} \frac{1}{(1 - z^{-1})} + \frac{\frac{N\tau_d}{\tau_d + NT_e}(1 - z^{-1})}{1 - \frac{\tau_d}{\tau_d + NT_e}z^{-1}} \right] \quad (4.23)$$

En développant cette équation, le correcteur numérique s'écrit :

$$C(z^{-1}) = \frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})} = \frac{r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1})} \quad (4.24)$$

avec :  $R(z^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}$  et  $S(z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1})$ . La synthèse de ce correcteur consiste à calculer les valeurs des coefficients  $r_0, r_1, r_2$  et  $s_1$ , pour un modèle d'ordre deux fixé  $H_d^+$ . Ces quatre coefficients sont liés aux coefficients du correcteur continu par les relations suivantes :

$$K = \left| \frac{r_0 s_1 - r_1 - (2 + s_1)r_2}{(1 + s_1)^2} \right| \quad (4.25)$$

$$\tau_i = \left| T_e \frac{K(1 + s_1)}{r_0 + r_1 + r_2} \right| \quad (4.26)$$

$$\tau_d = \left| T_e \frac{s_1^2 r_0 - s_1 r_1 + r_2}{K(1 + s_1)^3} \right| \quad (4.27)$$

$$N = -\tau_d \frac{1 + s_1}{s_1 T_e} \quad (4.28)$$

$$\text{avec : } -1 < s_1 \leq 0 \quad (4.29)$$

**Remarque** : Tous les correcteurs PID numériques n'ont pas un équivalent en continu. Il est possible d'obtenir un jeu de paramètres numériques pour lequel aucune équivalence continue n'est possible. Pour savoir si un correcteur PID numérique possède un équivalent continu, il faut :

$$-1 < s_1 \leq 0$$

<sup>1</sup>Classiquement, le filtrage de l'action dérivée s'effectue sur une décade :  $N = 10$

### 4.5.3 Étude du correcteur en régulation

Un correcteur PID numérique peut être synthétisé par une structure RST. La figure 4.7 est un schéma bloc du fonctionnement du correcteur en régulation, dans le cas où la perturbation est modélisée par un signal additif en sortie du système. Le système à réguler est modélisé par sa transmittance bloquée :

$$\widehat{GB}_o(z^{-1}) = z^{-d} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (4.30)$$

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m} \quad (4.31)$$

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n} \quad (4.32)$$

Le transfert entre la sortie en la perturbation s'écrit :

$$\frac{Y(z^{-1})}{W_p(z^{-1})} = \frac{A(z^{-1})S(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R(z^{-1})} \quad (4.33)$$

Le comportement du système en régulation est régi par les pôles de cette fonction de transfert ; c'est à dire les racines de l'équation :

$$A(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R(z^{-1}) = 0 \quad (4.34)$$

Dans le cas d'un PID numérique on cherche généralement à obtenir un modèle corrigé d'ordre deux, donné par :

$$H(z^{-1}) = \frac{H_N(z^{-1})}{H_D^+(z^{-1})} \text{ avec : } H_D^+(z^{-1}) = 1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} \quad (4.35)$$

Les coefficients de  $H_D^+(z^{-1})$  sont calculés à partir des caractéristiques du modèle d'ordre deux à atteindre (le coefficient d'amortissement  $\xi$  et la pulsation propre  $\omega_n$ ) :

$$h_1 = -(Z_1 + Z_1^*) \quad (4.36)$$

$$h_2 = Z_1 Z_1^* \quad (4.37)$$

$$Z_1, Z_1^* = \exp\left(-\xi \omega_n T_e \pm j \sqrt{(1 - \xi^2)} \omega_n T_e\right) \quad (4.38)$$

Pour obtenir le comportement souhaité, il faut identifier l'équation caractéristique 4.34 avec le modèle désiré :

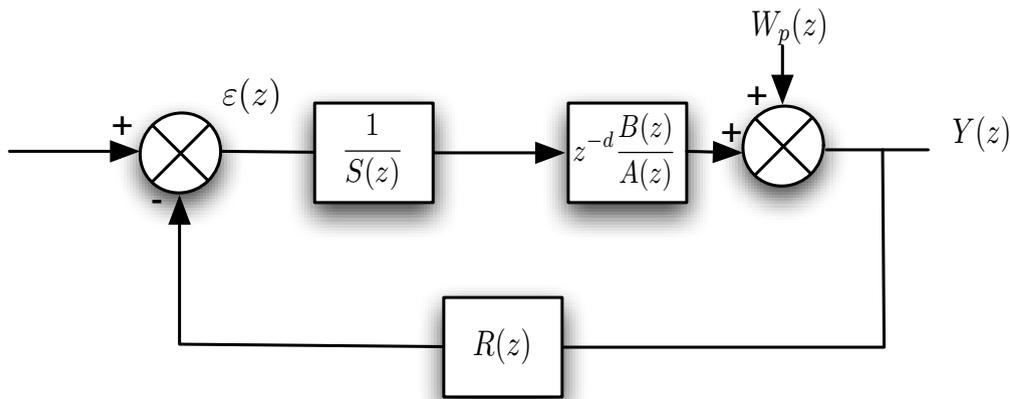


FIGURE 4.7 – Schéma bloc du fonctionnement en régulation d'un correcteur PID numérique.

$$A(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R(z^{-1}) = 1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} \quad (4.39)$$

Cette équation est appelée identité de Bezout, ou équation Diophantienne. Sa résolution s'effectue en identifiant les termes de même degré en  $z$ . Cette identification peut conduire à la résolution d'un système linéaire matriciel pour déterminer les valeurs à appliquer aux différents paramètres du correcteur.

### 4.5.4 Etude du correcteur en poursuite

Le correcteur PID numérique est généralement synthétisé dans une structure RST. La figure 4.8 représente le schéma bloc d'une régulation PID numérique. Les blocs  $R(z^{-1})$  et  $S(z^{-1})$  ont pour expression :

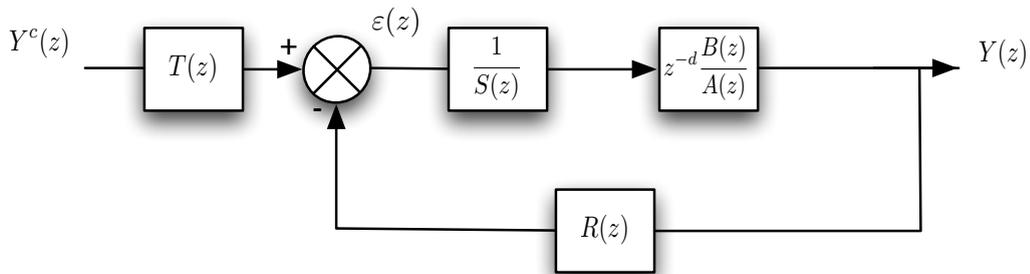


FIGURE 4.8 – Schéma bloc du fonctionnement en poursuite d'un correcteur PID numérique.

$$R(z^{-1}) = r_0 + r_1z^{-1} + r_2z^{-2} \tag{4.40}$$

$$S(z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 + s_1z^{-1}) \tag{4.41}$$

Deux types de correcteurs PID numériques sont distingués : les PID numérique structure 1 et les PID numériques structure 2. ils se distinguent l'un de l'autre par l'expression du bloc  $T(z^{-1})$

#### 4.5.4.1 PID numérique structure 1

Dans le cas d'un PID numérique structure 1, on fixe  $T(z^{-1}) = R(z^{-1})$ , ce qui a pour effet de ramener la structure du correcteur au schéma équivalent de la figure 4.9. Son comportement en poursuite est donné par :

$$\frac{Y(z^{-1})}{Y^c(z^{-1})} = \frac{R(z^{-1})z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R(z^{-1})} = \frac{R(z^{-1})z^{-d}B(z^{-1})}{H_D^+(z^{-1})} \tag{4.42}$$

Les performances sont les mêmes qu'en régulation. On constate que l'ordre du numérateur peut être assez important. Dans le cas d'un système d'ordre 2 ( $n = 2$ ),  $A(z^{-1})S(z^{-1})$  est d'ordre 4. Cet ordre élevé produit un retard dans l'application de la consigne, qui peut venir modifier le comportement du modèle souhaité, et notamment son dépassement indiciel.

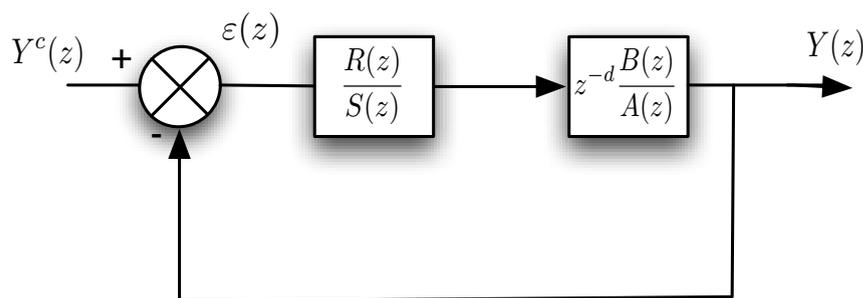


FIGURE 4.9 – Schéma bloc d'un correcteur PID numérique structure 1 ( $T(z^{-1}) = R(z^{-1})$ )

#### 4.5.4.2 PID numérique structure 2

Dans le cas du PID numérique structure deux, on cherche à réduire le degré du numérateur lors du transfert entre la consigne et la sortie. Pour cela, le polynôme  $T(z^{-1})$  devient un gain, défini par la relation suivante :

$$T = \frac{H_D^+(1)}{B(1)} \quad (4.43)$$

Le transfert entre la consigne et la sortie devient alors :

$$\frac{Y(z^{-1})}{Y^c(z^{-1})} = K_c \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R(z^{-1})} \quad (4.44)$$

$$\frac{Y(z^{-1})}{Y^c(z^{-1})} = K_c \frac{B(z^{-1})}{H_D^+(z^{-1})} \quad (4.45)$$

$$\text{avec : } K_c = \frac{H_D^+(1)}{B(1)} \quad (4.46)$$

L'avantage de ce type de correcteur est de limiter la présence de zéros dans le système corrigé. Par contre, il est indispensable de parfaitement connaître le modèle du système à contrôler, pour éviter un offset de gain statique du à l'écart entre le gain statique du modèle et celui du système réel.

#### 4.5.5 Exemple de calcul d'un PID numérique

On considère le système retardé d'ordre un dont le modèle est  $G(p) = \frac{e^{-0.3p}}{1 + 0.3p}$ , que l'on souhaite piloter à l'aide d'un correcteur de type PID numérique. Les contraintes à obtenir sont les suivantes :

- ▷ un dépassement de l'ordre de 25%,
- ▷ un temps de pic de 0.9s.

On choisira une période d'échantillonnage  $T_e = 0.3s$ . Calculer les correcteurs PID1 et PID2 permettant de répondre au cahier des charges.

##### 4.5.5.1 Calcul de la transmittance bloquée

La transmittance bloquée de  $G(p)$  se calcule en utilisant la formule suivante :

$$\widehat{GB}_o(z^{-1}) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left[ \frac{G(p)}{p} \right] \quad (4.47)$$

On remarque ici que le retard du système est de 0.3s, soit exactement une période d'échantillonnage. Il est donc possible de sortir le retard d'une période d'échantillonnage du calcul de la transformée en  $z$  en utilisant le théorème d'avance retard :

$$\widehat{GB}_o(z^{-1}) = (1 - z^{-1})z^{-1}\mathcal{Z} \left[ \frac{G'(p)}{p} \right] \quad (4.48)$$

$$G'(p) = \frac{1}{1 + 0.3p} \quad (4.49)$$

Il est alors possible d'exprimer la transmittance bloquée du système étudié à partir de celle d'un système d'ordre un, dont l'expression est connue :

$$\widehat{GB}_o(z^{-1}) = z^{-1} \frac{0,63z^{-1}}{1 - 0,37z^{-1}} \quad (4.50)$$

Les polynômes  $B(z^{-1})$  et  $A(z^{-1})$  s'écrivent alors :

$$A(z^{-1}) = 1 - 0.37z^{-1} \quad (4.51)$$

$$B(z^{-1}) = 0.63z^{-1} \quad (4.52)$$

et le retard  $d$  est d'un échantillon.

#### 4.5.5.2 Calcul du modèle

Le cahier des charges impose un dépassement de l'ordre de 25% et un temps de pic de 0.9s. En utilisant le tableau des valeurs numériques donné dans l'annexe D page 97, on extrait la valeur du coefficient d'amortissement associé :  $\xi = 0.4$ . Dans le même tableau, on relève un produit  $t_{pic}\omega_n = 3.43$ . On en déduit donc la pulsation propre du modèle à atteindre :  $\omega_n = 3.43/0.9 = 3,8rad/sec$

Le modèle d'ordre deux à atteindre est donné par la transmittance  $H(z^{-1}) = \frac{H_N(z^{-1})}{H_D^+(z^{-1})}$ , avec  $H_D^+(z^{-1}) = 1 + h_1z^{-1} + h_2z^{-2}$ . Le calcul de  $h_1$  et  $h_2$  s'effectue à partir des pôles complexes conjugués du modèles à atteindre :

$$Z_1, Z_1^* = \exp\left(-0.4 * 3.8 * 0.3 \pm j\sqrt{(1 - 0.4^2) * 3.8 * 0.3}\right) \quad (4.53)$$

$$Z_1, Z_1^* = 0,316 \pm j0,548 \quad (4.54)$$

On en déduit alors l'expression du modèle :

$$H_d^+(z^{-1}) = 1 - (Z_1 + Z_1^*)z^{-1} + Z_1Z_1^*z^{-2} \quad (4.55)$$

$$H_d^+(z^{-1}) = 1 - 0,63z^{-1} + 0,4z^{-2} \quad (4.56)$$

#### 4.5.5.3 Identité de Bezout

Une fois le modèle connu, il est possible d'écrire et de développer l'identité de Bezout :

$$A(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R(z^{-1}) = 1 + h_1z^{-1} + h_2z^{-2} \quad (4.57)$$

$$(1 - 0.37z^{-1})(1 - z^{-1})(1 + s_1z^{-1}) + z^{-1}(0.63z^{-1})(r_0 + r_1z^{-1} + r_2z^{-2}) = 1 - 0,63z^{-1} + 0,4z^{-2} \quad (4.58)$$

Le développement de cette expression conduit au système suivant :

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ -1,37 + s_1 = -0,63 \\ -0,37 - 1,37s_1 + 0,63r_0 = 0,4 \\ 0,37s_1 - 0,63r_1 = 0 \\ r_2 = 0 \end{cases} \quad (4.59)$$

Dans le cas général, ce système d'équation s'exprime sous forme matricielle par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.37 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.37 & -1.37 & 0.63 & 0 & 0 \\ 0 & 0.37 & 0 & 0.63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ s_1 \\ r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,63 \\ 0,4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

De la forme  $M\theta = X$ , les paramètres du correcteur se calculent par :

$$\theta = M^{-1}X \quad (4.61)$$

Les polynômes  $R(z^{-1})$  et  $S(z^{-1})$  s'expriment finalement :

$$S(z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 + 0,74z^{-1}) \quad (4.62)$$

$$R(z^{-1}) = 1,64 - 0,43z^{-1} \quad (4.63)$$

Dans le cas d'un PID numérique structure un, on pose  $T(z^{-1}) = R(z^{-1})$ . La figure 4.10 montre le comportement du système piloté par le correcteur PID1 obtenu. on constate que le comportement obtenu est légèrement différent à celui prévu dans le cahier des charge. Cette différence s'observe sur le dépassement de la réponse indicielle plus important que prévu (40% au lieu de 25%). Elle est due à la présence de zéros dans le système corrigé, apportés par le polynôme  $R(z^{-1})$ , et qui perturbent l'application de la consigne.

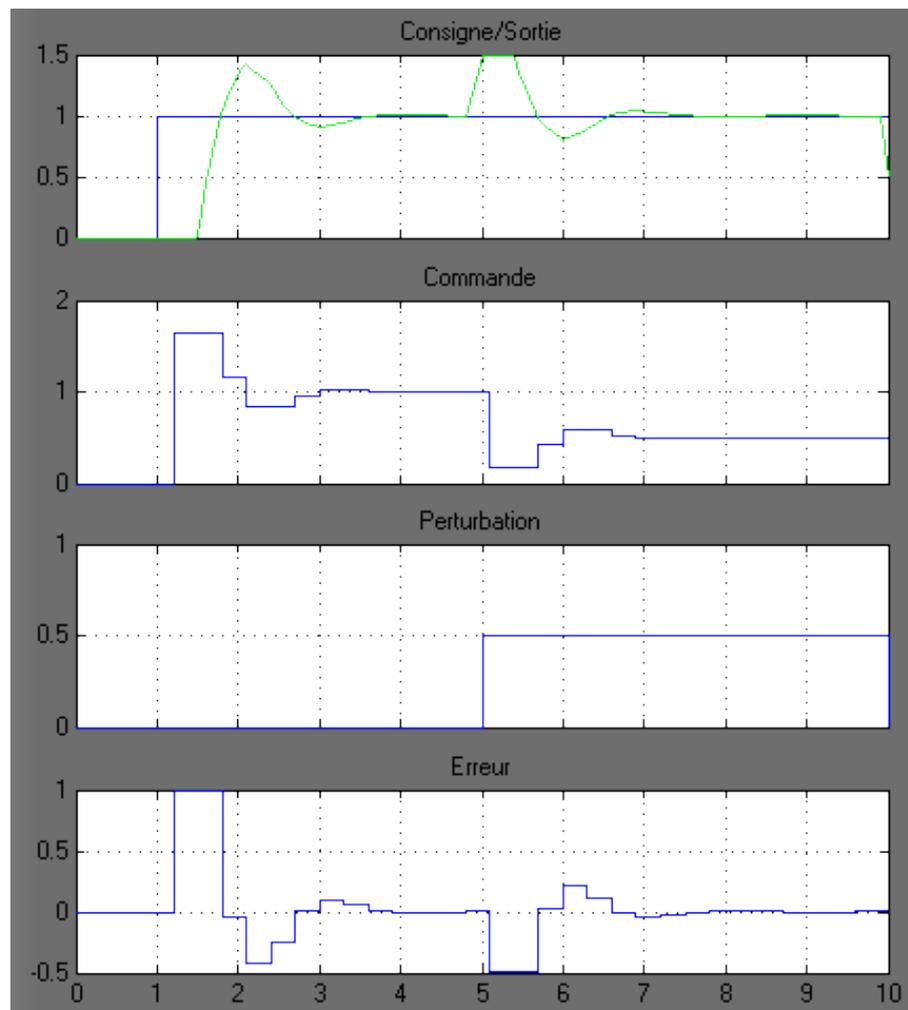


FIGURE 4.10 – Comportement du système piloté par un correcteur PID numérique structure 1 (réalisé sous Matlab Simulink)

Dans le cas d'un PID numérique structure 2,  $T(z^{-1}) = \frac{H_D^+(1)}{B(1)} = 1,22$ . La figure 4.11 montre le comportement du système piloté par le correcteur PID2 obtenu. On constate un comportement conforme au cahier des charges.

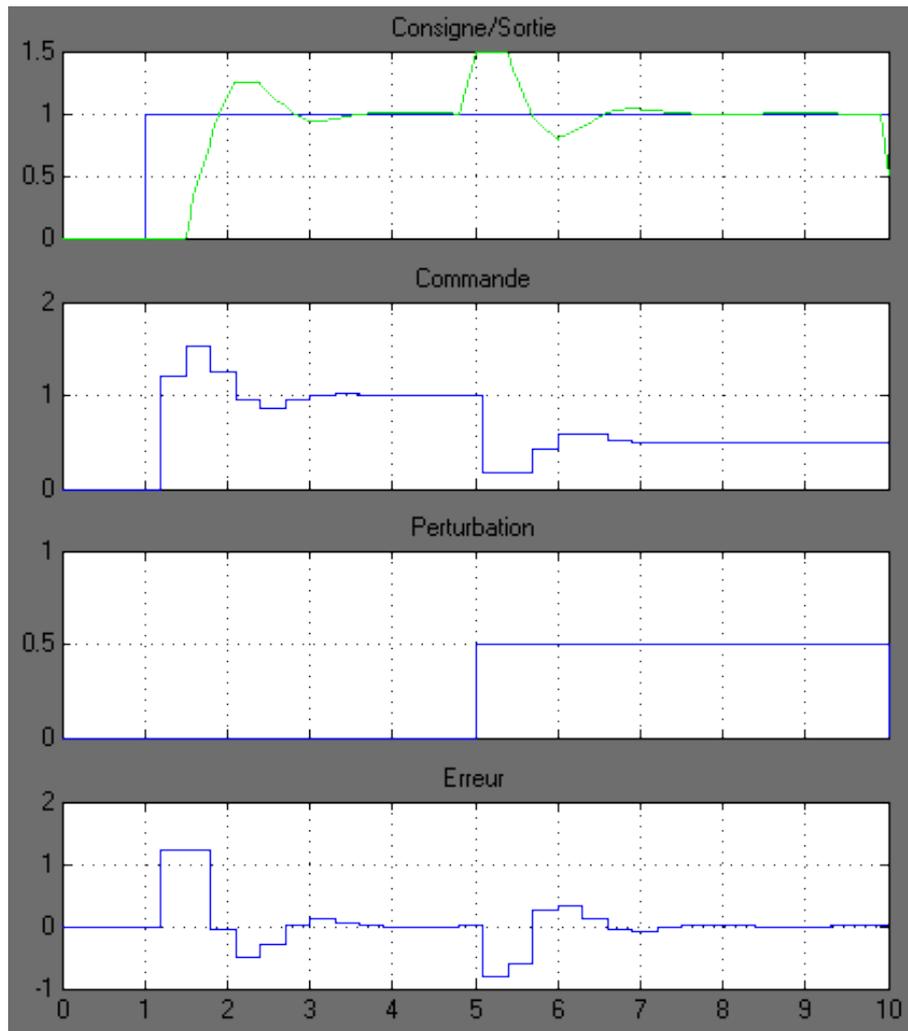


FIGURE 4.11 – Comportement du système piloté par un correcteur PID numérique structure 2 (réalisé sous Matlab Simulink)

#### 4.5.6 Programmation de la synthèse d'un correcteur Pid numérique sous Matlab

La boîte à outils *Control Toolbox* de Matlab dispose de fonctionnalités facilitant la synthèse des correcteurs numériques. La fonction présentée sur la table 4.2 permet de calculer les paramètres d'un correcteur de type PID structure un à partir de la fonction de transfert du système à piloter, et d'un cahier des charges composé d'un temps de montée, d'un dépassement souhaité et d'une période d'échantillonnage. par exemple, le couple d'instructions suivantes :

```
G = tf([1],[0.3 1],'InputDelay',0.3)
C = pid1(G,0.9,0.25,0.3)
```

retourne dans  $C$ , le correcteur PID numérique structure 1 correspondant à l'exercice précédent.

#### 4.5.7 Conclusion

Les correcteurs PID numériques permettent de piloter des systèmes d'ordre un et deux, avec un faible retard, à partir d'un modèle d'ordre deux désiré. Leur synthèse est simple à effectuer. Il existe deux structures de correcteurs. La première appelée structure un est utilisée lorsque le modèle de système à piloter est susceptible d'évoluer au cours du temps. La structure du correcteur ajoute des zéros au système corrigé, ce qui peut

```

%fonction pid1
function [C]=pid1(G,tm,D,Te)
% G : modèle du sytème continu a asservir
% tm : temps de monte a obtenir
% D : depassement souhaite entre 0 et 1
% Te : periode d'echantillonnage
% retourne le correcteur C
% Modele
xi=-log(D)/sqrt(pi^2+(log(D))^2)
wn = 1/(tm*sqrt(1-xi*xi))*(pi-acos(xi))
Z1 = exp(-xi*wn*Te+j*sqrt(1-xi*xi)*wn*Te)
Hd = [1 -(Z1+Z1') Z1*Z1']
% Calcul transmittance bloquee
r =get(G,'InputDelay'); % delay in sec.
d = r/Te;
GBo = c2d(G,Te)
set(GBo,'variable','z^-1')
[B,A] = tfdata(GBo,'v')
% Ajout integrateur au systeme
AI = conv(A,[1 -1])% avec integrateur
% Identite de Bezout
[R,S] = bezout(d,B,AI,Hd)
S = conv(S,[1 -1])
C = tf(R,S,Te,'variable','z^-1');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [R,S] = bezout(d,B,A,P)
% [R,S] = bezout(d,B,A,P)
%
% Retourne les coefficients des polynomes R et S
% correspondant a la relation de Bezout suivante :
%
%           -d
%          P = AS + z  BR
%
a = length(A)-1;
B = [zeros(1,d) B];
b = length(B)-1;
s = b-1;
r = a-1;
p = length(P)-1;
M = zeros(a+b,a+b);
for k=1:s+1
M(k:a+k,k) = A';
end;
for k=1:r+1
M(k:b+k,k+s+1) = B';
end;
SR=M\[P zeros(1,a+b-length(P))]' ;
S = SR(1:s+1)';
R = SR(s+2:s+2+r)';

```

TABLE 4.2 – Exemple de code Matlab permettant de calculer un correcteur de type PID structure un

produire des dépassements de la réponse indicielle supérieurs à ceux attendus. La seconde structure, appelée PID numérique structure deux, est utilisée lorsque le modèle du système à piloter est parfaitement connu et ne varie pas. Cette structure n'ajoute pas de zéros au système corrigé, ce qui produit une correction qui correspond exactement au cahier des charges. Par contre, si une variation de modèle intervient, cette dernière provoquera un biais entre la consigne et la sortie, se traduisant par une erreur statique non nulle.

## 4.6 Correcteurs de type placement de pôles

Les correcteurs de type placement de pôle permettent de piloter des systèmes d'ordre quelconque avec des retards qui peuvent être élevés. Il se synthétisent à partir d'une structure RST (cf. figure 4.5 page 63). Il n'y a pas de restriction sur les degrés des polynômes  $A(z^{-1})$  et  $B(z^{-1})$  du procédé. Il n'y a pas de restriction sur les zéros du procédé car la méthode ne les compense pas forcément. C'est une méthode qui permet de fixer des objectifs différents en poursuite et en régulation.

Le modèle à atteindre peut être d'ordre quelconque. Néanmoins, pour des raisons pratiques, il suit souvent un système d'ordre deux ; ce qui permet de le spécifier à partir d'un dépassement et d'un temps de montée désirés.

### 4.6.1 Etude en régulation

La figure 4.12 montre la structure du correcteur de type placement de pôles, piloté en régulation. La fonction de transfert entre  $Y^{c2}$  et  $Y$  a pour expression<sup>2</sup> :

$$\frac{Y}{T^{c2}} = \frac{z^{-d}B}{AS + z^{-d}BR} \quad (4.64)$$

avec,

$$B = b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_mz^{-m} \quad (4.65)$$

$$A = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n} \quad (4.66)$$

$$S = 1 + s_1z^{-1} + s_2z^{-2} + \dots + s_lz^{-l} \quad (4.67)$$

$$R = r_0 + r_1z^{-1} + r_2z^{-2} + \dots + r_lz^{-l} \quad (4.68)$$

Le but de la régulation est d'obtenir une dynamique de système corrigé qui correspond à un cahier des charges, traduit sous la forme du modèle numérique à atteindre  $H = \frac{H_N}{H_D}$ . On peut donc en déduire l'expression de l'identité de Bezout :

$$AS + z^{-d}BR = H_d^+ \quad (4.69)$$

Cette équation permet de fixer les degrés des polynômes  $R$  et  $S$  (coefficient  $l$ ), et de calculer leur expression numérique, en identifiant les termes de même degré en  $z$  :

$$l = \max(n, m + d) - 1 \quad (4.70)$$

Il est alors possible d'écrire les différentes équations du système sous la forme d'un système matriciel :

$$M\theta = H_D^+ \quad (4.71)$$

avec  $\theta = (1, s_1, \dots, s_l, r_0, r_1, \dots, r_l)^t$  et  $H_D^+ = (1, h_1, \dots)$

Le vecteur de paramètres  $\theta$  est obtenu par la relation :

$$\theta = M^{-1}H_D^+ \quad (4.72)$$

<sup>2</sup>Pour des raisons d'allègement des notations, on notera :  $\cdot \equiv \cdot(z^{-1})$

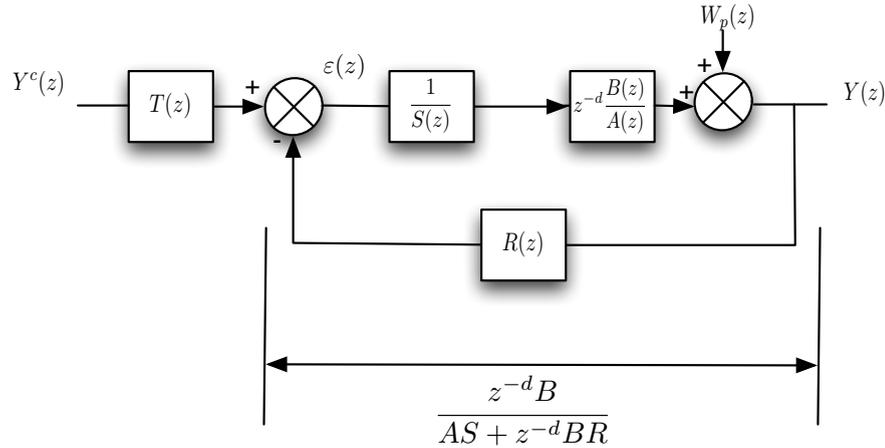


FIGURE 4.12 – Synoptique d'un correcteur de type placement de pôles en régulation

#### 4.6.1.1 Ajout d'intégrateurs et de filtres adoucisseurs

Le cahier des charges impose souvent des contraintes sur les erreurs statiques du système. En fonction du nombre d'intégrateurs déjà présents dans le système, on peut être amené à en ajouter dans le correcteur. Cette opération s'effectue au niveau du polynôme  $S$ , qui se sépare alors en deux parties :

$$S(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^g S'(z^{-1}) \quad (4.73)$$

Lorsque le signal issu du capteur de mesure est bruité, un filtre adoucisseur peut être ajouté avant le polynôme  $R(z^{-1})$ . Dans le cas d'un filtre adoucisseur d'ordre un, l'expression est :

$$H_a(z^{-1}) = \frac{1 - cz^{-1}}{1 - c} \text{ avec } : 0 < c \leq 1 \quad (4.74)$$

La figure 4.13 montre le synoptique du système corrigé obtenu, avec l'ajout d'un bloc intégrateur et d'un filtre adoucisseur. La fonction de transfert entre  $Y^{c2}$  et  $Y$  a maintenant pour expression :

$$\frac{Y}{Y^{c2}} = \frac{z^{-d} B}{AS'(1 - z^{-1})^g + z^{-d} B H_a R} \quad (4.75)$$

D'où l'expression de l'identité de Bezout :

$$AS'(1 - z^{-1})^g + z^{-d} B H_a R = H_D^+ \quad (4.76)$$

Le degré des polynômes  $R$  et  $S'$  est calculé par la relation suivante :

$$l = \max(n + g, m + d + \deg(H_a)) - 1 \quad (4.77)$$

La résolution du système s'effectue, à partir du développement de l'identité de Bezout, de manière similaire au cas précédent.

#### 4.6.2 Etude en poursuite

On cherche à imposer au système un modèle en poursuite, différent de celui fixé en régulation ( $H_D^+$ ), et défini par  $\frac{B_m}{A_m}$ . Ce type de synthèse est appelée correction à objectifs indépendants. Malheureusement, d'une part,

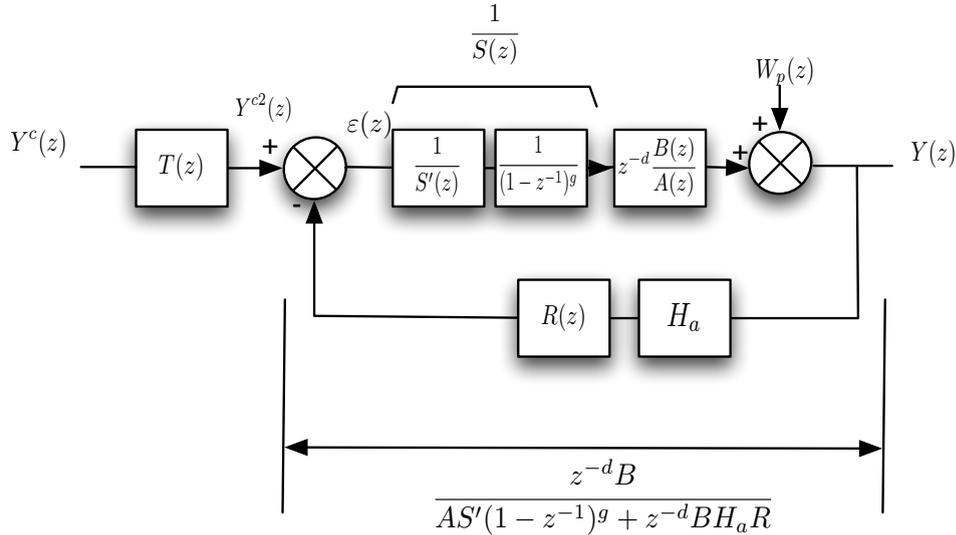


FIGURE 4.13 – Synoptique d'un correcteur de type placement de pôles en régulation avec ajout d'intégrateurs et d'un filtre adoucisseur

le retard pur du système n'est pas compensable ; et d'autre part, la méthode proposée ici ne compense pas les zéros du système. Il en résulte que le modèle obtenu approchera le modèle recherché :

$$Y = k_B z^{-(d+1)} \frac{B_m(z^{-1}) B^*(z^{-1})}{A_m(z^{-1})} Y^c \quad (4.78)$$

avec  $z^{-1} B^*(z^{-1}) = B(z^{-1})$  et  $k_B = \frac{1}{B(1)}$

Pour obtenir ce transfert entre la consigne et la sortie, on choisit :

$$T(z^{-1}) = k_B H_D^+(z^{-1}) \quad (4.79)$$

La figure 4.14 synthétise les différents transferts d'une correction de type placement de pôles à objectifs indépendants.

### 4.6.3 Compensation des zéros stables

La présence de zéros non souhaités dans le système corrigé peut conduire à des comportements différents de ceux voulus par le modèle  $\frac{B_m}{A_m}$ . Il est possible de compenser les zéros stables du système en ajoutant des pôles équivalents dans le bloc  $S(z^{-1})$  du correcteur. Pour cela, on factorise  $B^*(z^{-1})$  sous la forme :

$$B^*(z^{-1}) = B^{*+}(z^{-1}) B^{*-}(z^{-1}) \quad (4.80)$$

La partie positive est alors compensée à travers le polynôme  $S(z^{-1})$  :

$$S(z^{-1}) = B^{*+}(z^{-1}) S'(z^{-1}) \quad (4.81)$$

La figure 4.15 représente le synoptique général du correcteur obtenu. La fonction de transfert entre  $Y^{c1}$  et  $Y$  a maintenant pour expression :

$$\frac{Y}{Y^{c1}} = \frac{z^{-(d+1)} B^{*-}}{AS' + z^{-(d+1)} B^{*-} R} \quad (4.82)$$

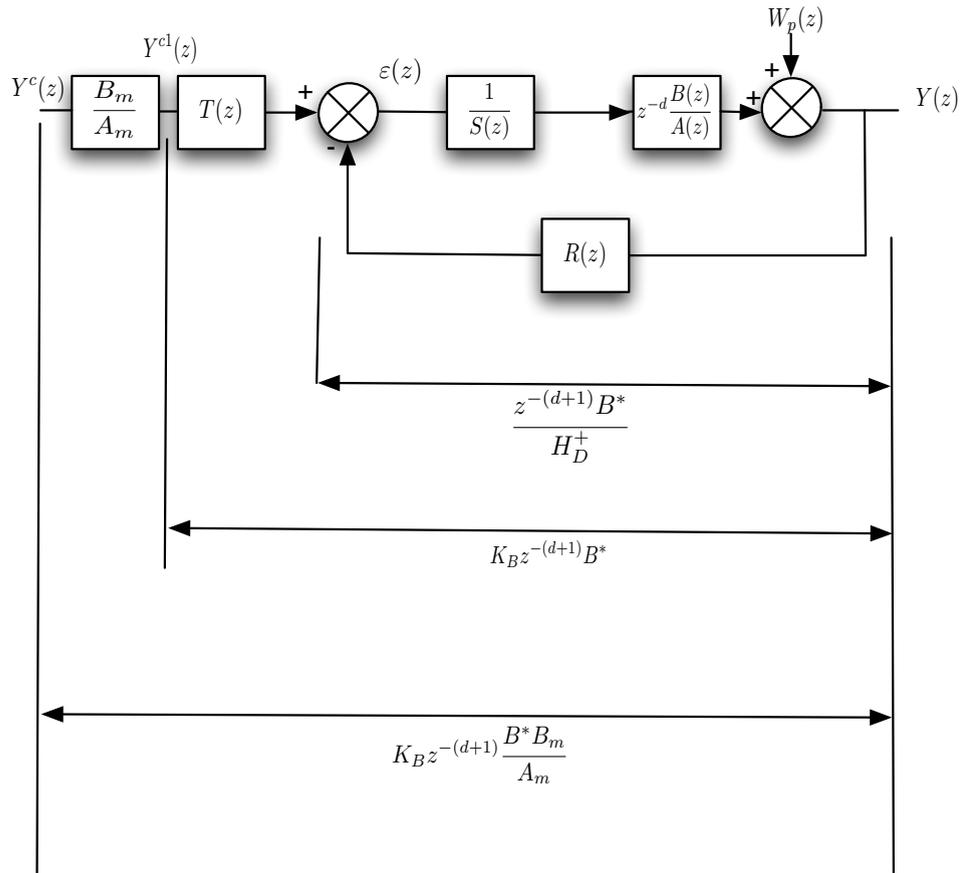


FIGURE 4.14 – Synoptique d'un correcteur de type placement de pôles à objectifs indépendants

D'où l'expression de l'identité de Bezout :

$$AS' + z^{-(d+1)}B^{*+} = H_D^+ \quad (4.83)$$

La résolution du système s'effectue alors de manière similaire au cas précédent, en remplaçant  $B$  par  $B^{*+}$ .

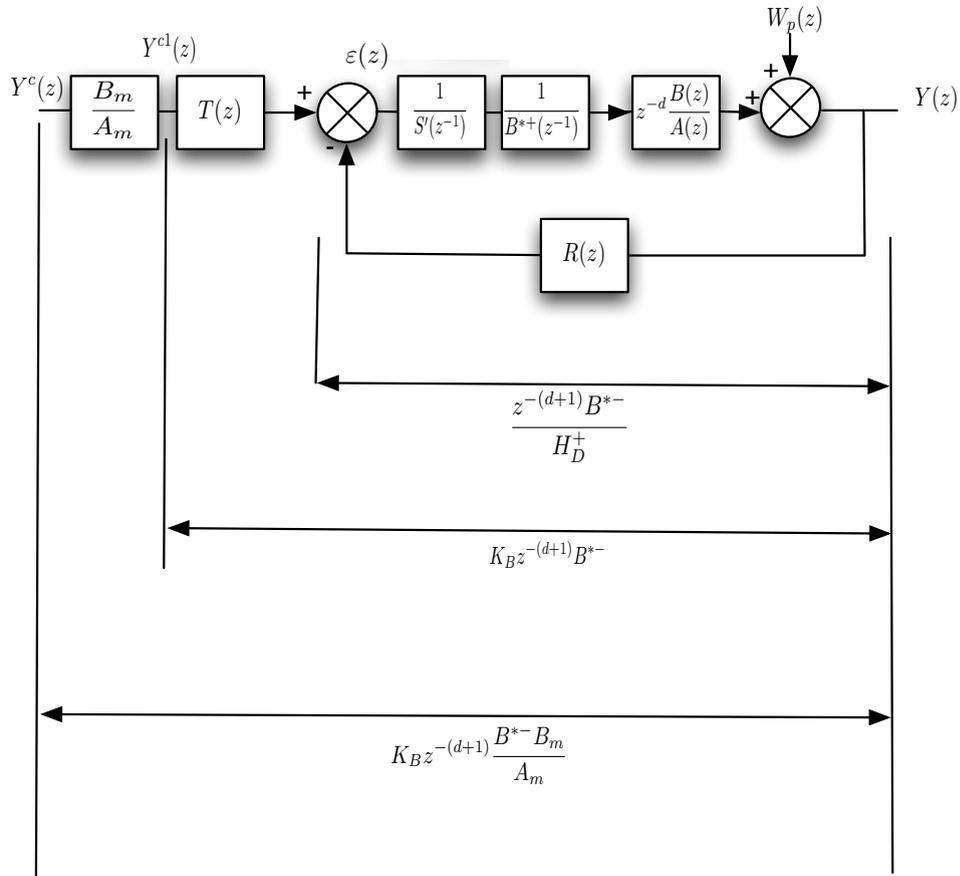


FIGURE 4.15 – Synoptique d’un correcteur de type placement de pôles à objectifs indépendants, avec compensation des zéros

ANNEXE

**A**

---

# TABLES DE TRANSFORMÉES

---

Cette annexe contient une table de transformées de Laplace et de transformées en  $Z$ . Elle est utilisée lorsque l'on désire passer d'un signal temporel à sa

transformée de Laplace ou sa transformée en  $Z$ . Elle est aussi utile pour le calcul de la transmittance bloquée d'un système continu.

---



Transformée de Laplace $X(s)$	Fonction du temps $x(t), t > 0$	Transformée en $z$ $X(z)$
1	$\delta(t)$	1
$e^{-kTs}$	$\delta(t - kT)$	$z^{-k}$
$\frac{1}{s}$	$\Gamma(t) = 1$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	$t$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$\frac{1}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{k!} t^k$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left( \frac{z}{z - e^{-aT}} \right)$
$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$te^{-at}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$
$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{t^2}{2} e^{-at}$	$\frac{T^2 e^{-aT} z}{2(z - e^{-aT})^2} + \frac{T^2 e^{-2aT} z}{(z - e^{-aT})^3}$

FIGURE A.1 - /9

Transformée de Laplace $X(s)$	Fonction du temps $x(t), t > 0$	Transformée en $z$ $X(z)$
$\frac{1}{(s+a)^{k+1}}$	$\frac{t^k}{k!} e^{-at}$	$\frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left( \frac{z}{z - e^{-aT}} \right)$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$	$\frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})}$
$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1 - (1+at)e^{-at}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-aT}} - \frac{aT e^{-aT} z}{(z - e^{-aT})^2}$
$\frac{a^3}{s(s+a)^3}$	$1 - e^{-aT} \left( 1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} \right)$	$\frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})} - \frac{aT(2 + aT)e^{-aT} z}{(z - e^{-aT})^2} - \frac{a^2 T^2 e^{-2aT} z}{(z - e^{-aT})^3}$
$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$t - \frac{1 - e^{-at}}{a}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1 - e^{-aT})z}{a(z-1)(z - e^{-aT})}$
$\frac{a}{s^3(s+a)}$	$\frac{t^2}{2} + \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}(1 - e^{-aT})$	$\frac{T^2 z}{(z-1)^3} + \frac{(aT-2)Tz}{2a(z-1)^2} + \frac{z}{a^2(z-1)} - \frac{z}{a^2(z - e^{-aT})}$
$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin at$	$\frac{z \sin aT}{z^2 - 2z \cos aT + 1}$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$	$\frac{z(z - \cos aT)}{z^2 - 2z \cos aT + 1}$
$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\text{sh } at$	$\frac{z \text{sha}T}{z^2 - 2z \text{cha}T + 1}$

FIGURE A.2 - /9

Transformée de Laplace $X(s)$	Fonction du temps $x(t), t > 0$	Transformée en $z$ $X(z)$
$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\text{ch } at$	$\frac{z(z - \text{cha}T)}{z^2 - 2z\text{cha}T + 1}$
$\frac{a^2}{s(s^2 + a^2)}$	$1 - \cos at$	$\left[ \frac{z}{z - 1} - \frac{z(z - \cos aT)}{z^2 - 2z \cos aT + 1} \right]$
$\frac{a^2}{s^2(s^2 + a^2)}$	$t - \frac{1}{a} \sin at$	$\frac{Tz}{(z - 1)^2}$ $-\frac{1}{a} \frac{z \sin aT}{z^2 - 2z \cos aT + 1}$
$\frac{b - a}{(s + a)(s + b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}} - \frac{z}{z - e^{-bT}}$
$\frac{(b - a)(s + c)}{(s + a)(s + b)}$	$(c - a)e^{-at} + (b - c)e^{-bt}$	$\frac{(c - a)z}{z - e^{-aT}} + \frac{(b - c)z}{z - e^{-bT}}$
$\frac{ab}{s(s + a)(s + b)}$	$1 + \frac{b}{a - b}e^{-at} - \frac{a}{a - b}e^{-bt}$	$\frac{z}{z - 1} + \frac{bz}{(a - b)(z - e^{-aT})}$ $-\frac{az}{(a - b)(z - e^{-bT})}$
$\frac{a(s + b)}{s(s + a)}$	$\frac{b}{a} + \left(1 - \frac{b}{a}\right)e^{-at}$	$\frac{z}{z - e^{-at}} + \frac{b}{a} \frac{(1 - e^{-aT})z}{(z - 1)(z - e^{-aT})}$
$\frac{a^2(s + b)}{s(s + a)^2}$	$b - be^{-at} + a(a - b)te^{-at}$	$\frac{bz}{z - 1} - \frac{bz}{z - e^{-aT}}$ $+ \frac{a(a - b)Te^{-aT}z}{(z - e^{-aT})^2}$
$\frac{b}{(s + a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \sin bt$	$\frac{ze^{-aT} \sin bT}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos bT + e^{-2aT}}$
$\frac{s + a}{(s + a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \cos bt$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos bT}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos bT + e^{-2aT}}$

FIGURE A.3 - /9

Transformée de Laplace $X(s)$	Fonction du temps $x(t), t > 0$	Transformée en $z$ $X(z)$
$\frac{1}{(s+a)^{k+1}}$	$\frac{t^k}{k!} e^{-at}$	$\frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left( \frac{z}{z - e^{-aT}} \right)$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$	$\frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})}$
$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1 - (1+at)e^{-at}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-aT}} - \frac{aTe^{-aT}z}{(z - e^{-aT})^2}$
$\frac{a^3}{s(s+a)^3}$	$1 - e^{-aT} \left( 1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} \right)$	$\frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})} - \frac{aT(2 + aT)e^{-aT}z}{(z - e^{-aT})^2} + \frac{a^2 T^2 e^{-2aT}z}{(z - e^{-aT})^3}$
$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$t - \frac{1 - e^{-at}}{a}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1 - e^{-aT})z}{a(z-1)(z - e^{-aT})}$
$\frac{a}{s^3(s+a)}$	$\frac{t^2}{2} + \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}(1 - e^{-aT})$	$\frac{T^2 z}{(z-1)^3} + \frac{(aT-2)Tz}{2a(z-1)^2} + \frac{z}{a^2(z-1)} - \frac{z}{a^2(z - e^{-aT})}$
$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin at$	$\frac{z \sin aT}{z^2 - 2z \cos aT + 1}$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$	$\frac{z(z - \cos aT)}{z^2 - 2z \cos aT + 1}$
$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\text{sh } at$	$\frac{z \text{sha}T}{z^2 - 2z \text{cha}T + 1}$

FIGURE A.4 - 9

Transformée de Laplace $X(s)$	Fonction du temps $x(t), t > 0$	Transformée en $z$ $X(z)$
$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\text{ch } at$	$\frac{z(z - \text{cha}T)}{z^2 - 2z\text{cha}T + 1}$
$\frac{a^2}{s(s^2 + a^2)}$	$1 - \cos at$	$\left[ \frac{z}{z-1} - \frac{z(z - \cos aT)}{z^2 - 2z \cos aT + 1} \right]$
$\frac{a^2}{s^2(s^2 + a^2)}$	$t - \frac{1}{a} \sin at$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$ $-\frac{1}{a} \frac{z \sin aT}{z^2 - 2z \cos aT + 1}$
$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}} - \frac{z}{z - e^{-bT}}$
$\frac{(b-a)(s+c)}{(s+a)(s+b)}$	$(c-a)e^{-at} + (b-c)e^{-bt}$	$\frac{(c-a)z}{z - e^{-aT}} + \frac{(b-c)z}{z - e^{-bT}}$
$\frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$	$1 + \frac{b}{a-b}e^{-at} - \frac{a}{a-b}e^{-bt}$	$\frac{z}{z-1} + \frac{bz}{(a-b)(z - e^{-aT})}$ $-\frac{az}{(a-b)(z - e^{-bT})}$
$\frac{a(s+b)}{s(s+a)}$	$\frac{b}{a} + \left(1 - \frac{b}{a}\right)e^{-at}$	$\frac{z}{z - e^{-at}} + \frac{b}{a} \frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})}$
$\frac{a^2(s+b)}{s(s+a)^2}$	$b - be^{-at} + a(a-b)te^{-at}$	$\frac{bz}{z-1} - \frac{bz}{z - e^{-aT}}$ $+ \frac{a(a-b)Te^{-aT}z}{(z - e^{-aT})^2}$
$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \sin bt$	$\frac{ze^{-aT} \sin bT}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos bT + e^{-2aT}}$
$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \cos bt$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos bT}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos bT + e^{-2aT}}$

FIGURE A.5 - /9

Transmittance en $s$	Transmittance en $z$
$\frac{B_0(s)}{s}$	$\frac{T}{z-1}$
$\frac{B_0(s)}{1+\tau s}$	$\frac{1-D}{z-D}, \quad D = e^{-\frac{T}{\tau}}$
$\frac{B_0(s)}{s(1+\tau s)}$	$\frac{(T-\tau(1-D))z - TD + \tau(1-D)}{z^2 - (1+D)z + D}$
$\frac{B_0(s)}{s^2(1+\tau s)}$	$\frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{D(z)}$ $D(z) = z^3 - (2+D)z^2 + (1+2D)z - D$ $b_2 = \frac{T^2}{2} + T\tau + \tau^2(1-D), \quad D = e^{-\frac{T}{\tau}}$ $b_1 = \left(\frac{T^2}{2} - 2\tau^2\right)(1-D) + T\tau(1+D)$ $b_0 = \tau^2(1-D) - DT\left(\tau + \frac{T}{2}\right)$
$\frac{B_0(s)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$	$\frac{b_1 z + b_0}{z^2 - (D_1 + D_2)z + D_1 D_2},$ $b_1 = \frac{\tau_1(1-D_1) - \tau_2(1-D_2)}{\tau_1 - \tau_2},$ $b_0 = D_1 D_2 - \frac{\tau_1 D_2 - \tau_2 D_1}{\tau_1 - \tau_2},$ $D_i = e^{-\frac{T}{\tau_i}}$
$\frac{B_0(s)}{(1+\tau s)^2}$	$\frac{1-D}{z-D} - \frac{T D(z-1)}{\tau (z-D)^2}$
$\frac{B_0(s)}{(1+\tau s)^3}$	$\frac{1-D}{z-D} - \frac{T(2\tau+T)D(z-1)}{\tau^2(z-D)^2},$ $-\frac{T^2 D^2(z-1)}{\tau^2 (z-D)^3},$
$\frac{B_0(s)}{\prod_{i=1}^n (1+\tau_i s)}$	$\sum_{i=1}^n \frac{\tau_i^{n-1} (1-D_i)}{\prod_{j \neq i} (\tau_i - \tau_j) (z-D_i)}$

FIGURE A.6 - /9

Transmittance en $s$	Transmittance en $z$ :
$F(s)$	$F(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{D(z)} \quad \left( \text{avec } D_i = e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right)$
$\frac{B_0(s)}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}$	$D(z) = z^3 - (1 + D_1 + D_2)z^2$ $+ (D_1 + D_2 + D_1 D_2)z - D_1 D_2$ $b_2 = T - \frac{\tau_1^2(1 - D_1) - \tau_2^2(1 - D_2)}{\tau_1 - \tau_2}$ $b_1 = -T(D_1 + D_2)$ $+ \frac{\tau_1^2(1 + D_2)(1 - D_1) - \tau_2^2(1 + D_1)(1 - D_2)}{\tau_1 - \tau_2}$ $b_0 = T D_1 D_2$ $- \frac{\tau_1^2 D_2(1 - D_1) - \tau_2^2 D_1(1 - D_2)}{\tau_1 - \tau_2}$
$\frac{B_0(s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s)}$	$D(z) = z^3 - (D_1 + D_2 + D_3)z^2$ $+ (D_1 D_2 + D_2 D_3 + D_3 D_1)z - D_1 D_2 D_3,$ $b_2 = - \left[ \frac{\tau_1^2(1 - D_1)}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_3 - \tau_1)} + \frac{\tau_2^2(1 - D_2)}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_1 - \tau_2)} \right.$ $\left. + \frac{\tau_3^2(1 - D_3)}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_2 - \tau_3)} \right]$ $b_1 = \frac{\tau_1^2(1 - D_1)(D_2 + D_3)}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_3 - \tau_1)}$ $+ \frac{\tau_2^2(1 - D_2)(D_3 + D_1)}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_1 - \tau_2)}$ $+ \frac{\tau_3^2(1 - D_3)(D_1 + D_2)}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_2 - \tau_3)}$ $b_0 = - \frac{\tau_1^2(1 - D_1)D_2 D_3}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_3 - \tau_1)} - \frac{\tau_2^2(1 - D_2)D_3 D_1}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_1 - \tau_2)}$ $- \frac{\tau_3^2(1 - D_3)D_1 D_2}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_2 - \tau_3)}$

FIGURE A.7 - /9

Transmittance en $s$	Transmittance en $z$
$\frac{B_0(s)}{s}$	$\frac{T}{z-1}$
$\frac{B_0(s)}{1+\tau s}$	$\frac{1-D}{z-D}, \quad D = e^{-\frac{T}{\tau}}$
$\frac{B_0(s)}{s(1+\tau s)}$	$\frac{(T-\tau(1-D))z - TD + \tau(1-D)}{z^2 - (1+D)z + D}$
$\frac{B_0(s)}{s^2(1+\tau s)}$	$\frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{D(z)}$ $D(z) = z^3 - (2+D)z^2 + (1+2D)z - D$ $b_2 = \frac{T^2}{2} + T\tau + \tau^2(1-D), \quad D = e^{-\frac{T}{\tau}}$ $b_1 = \left(\frac{T^2}{2} - 2\tau^2\right)(1-D) + T\tau(1+D)$ $b_0 = \tau^2(1-D) - DT\left(\tau + \frac{T}{2}\right)$
$\frac{B_0(s)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$	$\frac{b_1 z + b_0}{z^2 - (D_1 + D_2)z + D_1 D_2},$ $b_1 = \frac{\tau_1(1-D_1) - \tau_2(1-D_2)}{\tau_1 - \tau_2},$ $b_0 = D_1 D_2 - \frac{\tau_1 D_2 - \tau_2 D_1}{\tau_1 - \tau_2},$ $D_i = e^{-\frac{T}{\tau_i}}$
$\frac{B_0(s)}{(1+\tau s)^2}$	$\frac{1-D}{z-D} - \frac{T D(z-1)}{\tau(z-D)^2}$
$\frac{B_0(s)}{(1+\tau s)^3}$	$\frac{1-D}{z-D} - \frac{T(2\tau+T)D(z-1)}{\tau^2(z-D)^2},$ $-\frac{T^2 D^2(z-1)}{\tau^2(z-D)^3},$
$\frac{B_0(s)}{\prod_{i=1}^n (1+\tau_i s)}$	$\sum_{i=1}^n \frac{\tau_i^{n-1} (1-D_i)}{\prod_{j \neq i} (\tau_i - \tau_j) (z-D_i)}$

FIGURE A.8-19

Transmittance en $s$	Transmittance en $z$ :
$F(s)$	$F(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{D(z)} \quad \left( \text{avec } D_i = e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right)$
$\frac{B_0(s)}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}$	$D(z) = z^3 - (1 + D_1 + D_2)z^2$ $+ (D_1 + D_2 + D_1 D_2)z - D_1 D_2$ $b_2 = T - \frac{\tau_1^2(1 - D_1) - \tau_2^2(1 - D_2)}{\tau_1 - \tau_2}$ $b_1 = -T(D_1 + D_2)$ $+ \frac{\tau_1^2(1 + D_2)(1 - D_1) - \tau_2^2(1 + D_1)(1 - D_2)}{\tau_1 - \tau_2}$ $b_0 = T D_1 D_2$ $- \frac{\tau_1^2 D_2(1 - D_1) - \tau_2^2 D_1(1 - D_2)}{\tau_1 - \tau_2}$
$\frac{B_0(s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s)}$	$D(z) = z^3 - (D_1 + D_2 + D_3)z^2$ $+ (D_1 D_2 + D_2 D_3 + D_3 D_1)z - D_1 D_2 D_3,$ $b_2 = - \left[ \frac{\tau_1^2(1 - D_1)}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_3 - \tau_1)} + \frac{\tau_2^2(1 - D_2)}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_1 - \tau_2)} \right.$ $\left. + \frac{\tau_3^2(1 - D_3)}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_2 - \tau_3)} \right]$ $b_1 = \frac{\tau_1^2(1 - D_1)(D_2 + D_3)}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_3 - \tau_1)}$ $+ \frac{\tau_2^2(1 - D_2)(D_3 + D_1)}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_1 - \tau_2)}$ $+ \frac{\tau_3^2(1 - D_3)(D_1 + D_2)}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_2 - \tau_3)}$ $b_0 = - \frac{\tau_1^2(1 - D_1)D_2 D_3}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_3 - \tau_1)} - \frac{\tau_2^2(1 - D_2)D_3 D_1}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_1 - \tau_2)}$ $- \frac{\tau_3^2(1 - D_3)D_1 D_2}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_2 - \tau_3)}$

FIGURE A.9 - /9



ANNEXE

**B**

---

## **SYSTÈME D'ORDRE DEUX**

---

Cette annexe présente un tableau des valeurs caractéristiques d'un système d'ordre deux, ainsi

que les principales formules permettant de remonter à ces valeurs à partir des paramètres du modèle.

---



$\xi$	$t_m \cdot \omega_n$	$t_r \cdot \omega_n$	$t_{pic} \cdot \omega_n$	$T_p \cdot \omega_n$	$D\%$	$\omega_r/\omega_n$	$\omega_c/\omega_n$	$\omega_c/\omega_r$	$M_{dB}$
0,1	1,68	30	3,16	6,31	73	0,99	1,54	1,56	14
0,15	1,74	20	3,18	6,36	62	0,98	1,53	1,56	10,5
0,2	1,81	14	3,21	6,41	53	0,96	1,51	1,57	8,1
0,25	1,88	11	3,24	6,49	44	0,94	1,48	1,59	6,3
0,3	1,97	10,1	3,29	6,59	37	0,91	1,45	1,61	4,8
0,35	2,06	7,9	3,35	6,71	31	0,87	1,42	1,63	3,6
0,4	2,16	7,7	3,43	6,86	25	0,82	1,37	1,67	2,7
0,45	2,28	5,4	3,52	7,04	21	0,77	1,33	1,72	1,9
0,5	2,42	5,3	3,63	7,26	16	0,71	1,27	1,80	1,2
0,55	2,58	5,3	3,76	7,52	12,6	0,63	1,21	1,93	0,7
0,6	2,77	5,2	3,93	7,85	9,5	0,53	1,15	2,17	0,3
0,65	3,00	5,0	4,13	8,27	6,8	0,39	1,08	2,74	0,1
0,7	3,29	3	4,40	8,80	4,6	0,14	1,01	7,14	0
0,75	3,66	3,1	4,75	9,50	2,84	-	0,94	-	-
0,8	4,16	3,4	5,24	10,5	1,52	-	0,87	-	-
0,85	4,91	3,7	5,96	11,93	0,63	-	0,81	-	-
0,9	6,17	4	7,21	14,41	0,15	-	0,75	-	-
0,95	9,09	4,1	10,06	20,12	0,01	-	0,69	-	-

Formules utilisées :

▷  $t_m = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} (\pi - \arccos \xi)$  ( $t_m$  : temps de montée)

▷  $t_r \simeq \frac{1}{\omega_n \cdot \xi} \log_e \left( \frac{100}{n} \right)$  ( $t_r$  : temps de réponse à n%,  $\xi < 0,7$ , ici  $n = 5\%$ )

▷  $t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$  ( $t_{pic}$  : temps de pic)

▷  $T_P = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$  ( $T_P$  : pseudo-période)

▷  $D_{\%} = 100 \exp \frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$  ( $D_{\%}$  : dépassement)

▷  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2}$  ( $\omega_r$  : pulsation de résonance)

▷  $\omega_c = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2 + \sqrt{1+(1-2\xi^2)^2}}$  ( $\omega_c$  : pulsation de coupure)

▷  $m = \frac{1}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}}$  ( $m$  : facteur de résonance)

▷  $M_{dB} = 20 \log m$  ( $M_{dB}$  : facteur de résonance en décibels)



ANNEXE

**C**

---

# LES NOMBRES COMPLEXES

---

Cette annexe présente quelques rappels utiles sur les nombres complexes et leur représentation graphique.

---



## C.1 introduction

Les nombres complexes sont une extension des nombres réels. Ils permettent de définir des solutions à toutes les équations polynomiales à coefficients réels. Les nombres complexes furent introduits au XVII<sup>e</sup> siècle par les mathématiciens italiens Jérôme Cardan, Raphaël Bombelli, Nicolo Fontana, dit Tartaglia, et Ludovico Ferrari afin d'exprimer les solutions des équations du troisième degré en toute généralité par les formules de Cardan, en utilisant notamment des nombres de carré négatif, ainsi que les solutions des équations du quatrième degré.

## C.2 Notation des nombres complexes

Les nombre complexes se représentent généralement, soit sous leur forme cartésienne, soit en coordonnées polaires. Ils sont souvent représenté sur un plan dont l'axe des abscisses est associé à la partie réelle du nombre complexe et l'axe des ordonnées est associé à sa partie imaginaire.

### C.2.1 Représentation cartésienne

Un nombre complexe  $z$  se présente en général en coordonnées cartésiennes, comme une somme  $z = a + bi$ , où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels quelconques et  $i$  (l'unité imaginaire) (parfois aussi noté  $j$  est un nombre particulier tel que  $i^2 = -1$ ).

Le réel  $a$  est appelé partie réelle de  $z$  et se note  $\text{Re}(z)$ , le réel  $b$  est sa partie imaginaire et se note  $\text{Im}(z)$ . Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Un nombre complexe  $z$  est dit imaginaire pur ou totalement imaginaire si sa partie réelle est nulle, dans ce cas il s'écrit sous la forme  $z = bi$ . Un nombre complexe dont la partie imaginaire vaut 0 est assimilé à un nombre réel. Le nombre réel 0 est le seul qui soit à la fois réel et imaginaire pur, mais la plupart des nombres complexes ne sont ni réels ni imaginaires purs. Deux nombres complexes sont dis conjugués s'ils ont la même partie réelle et deux parties imaginaires opposées.

L'addition et la multiplication sur les nombres complexes ont les mêmes propriétés d'associativité, de commutativité et de distributivité que sur les nombres réels.

### C.2.2 représentation polaire

Le module et l'argument d'un nombre complexe correspondent aux coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  de son image dans le plan complexe. En écrivant les coordonnées cartésiennes à partir des coordonnées polaires, tout nombre complexe non nul peut donc s'écrire sous une forme trigonométrique  $z = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ , avec  $\rho > 0$ .

La formule d'Euler  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$  permet de compacter cette écriture sous une forme exponentielle  $z = \rho e^{i\theta}$ . Le conjugué s'écrit alors simplement  $z^* = \rho e^{-i\theta} = \rho(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$ .

Cette écriture est en outre adaptée au calcul du produit de deux nombres complexes du fait des propriétés multiplicatives de la fonction exponentielle :

$$\left(\rho e^{i\theta}\right) \left(\rho' e^{i\theta'}\right) = (\rho\rho') e^{i(\theta+\theta')}$$



---

## QUELQUES COMMANDES MATLAB

---

Cette annexe présente un tableau décrivant les principales commandes Matlab utiles dans l'étude et la simulation de systèmes linéaires continus et échantillonnés. La plupart des commandes présentées ici sont également disponibles sous octave. D'autre

part, elles nécessitent de disposer de la boîte à outils `Control Toolbox`. La liste donnée ici ne se veut pas exhaustive et les explications données sont orientées pour un cadre d'utilisation en Automatique linéaire.

---



Fonction	Définition	Exemples d'utilisation
<b>G = tf(num,den)</b>	<p>Définition d'une fonction de transfert à partir de deux vecteurs de coefficients décrivant les coefficients du numérateur et ceux du dénominateur de la fonction de transfert. Un troisième paramètre donnant la période d'échantillonnage peut être ajouté.</p> <p>Un retard pur peut également être pris en compte. Dans le cas d'une transmittance bloquée, il doit être indiqué en nombre de périodes d'échantillonnage.</p>	<p>▷ <math>G = \text{tf}([1], [1 \ 3])</math> : affecte à <math>G</math> la fonction de transfert continue <math>G(p) = \frac{1}{1 + 3p}</math></p> <p>▷ <math>G = \text{tf}([0.8], [1 \ -0.2], 1)</math> : affecte à <math>G</math> la transmittance discrète <math>G(z) = \frac{0.8}{z - 0.2}</math> pour une période d'échantillonnage <math>T_e = 1s</math></p> <p>▷ <math>G = \text{tf}([0.8], [1 \ -0.2], 1, 'variable', 'z^{-1}')</math> : affecte à <math>G</math> la transmittance discrète exprimée en puissances négatives de <math>z</math> : <math>G(z) = \frac{0.8}{1 - 0.2z^{-1}}</math> pour une période d'échantillonnage <math>T_e = 1s</math></p> <p>▷ <math>G = \text{tf}([1], [1 \ 3], 'InputDelay', 1)</math> : affecte à <math>G</math> la fonction de transfert continue <math>G(p) = \frac{e^{-p}}{1 + 3p}</math></p>
<b>Gz=c2d(G,Te)</b>	<p>Calcule la transmittance bloquée, à la période d'échantillonnage <math>T_e</math>, du système continu <math>G</math></p>	<p>▷ <math>G = \text{tf}([1], [1 \ 3]);</math> <math>Gbo=c2d(G, 1)</math></p> <p>Ces deux lignes permettent de calculer la transmittance bloquée du système défini par la fonction de transfert <math>G(p) = \frac{1}{1 + 3p}</math>, à la période d'échantillonnage <math>T_e = 1s</math></p>
<b>bode(G)</b>	<p>Calcule et affiche le diagramme de Bode du système en boucle ouverte <math>G</math></p>	<p>▷ <math>G = \text{tf}([1], [1 \ 3]); \text{bode}(G)</math></p> <p>Ces deux lignes permettent d'afficher le diagramme de Bode du système linéaire <math>G(p) = \frac{1}{1 + 3p}</math></p>
<b>nichols(G)</b>	<p>Calcule et affiche le diagramme de Black-Nichols du système en boucle ouverte <math>G</math></p>	<p>▷ <math>G = \text{tf}([1], [1 \ 3]);</math> <math>\text{nichols}(G); \text{grid on};</math></p> <p>Ces trois lignes permettent de calculer et d'afficher le diagramme de Black-Nichols du système linéaire <math>G(p) = \frac{1}{1 + 3p}</math>. La commande <code>grid on</code> affiche les courbes iso-gain et iso-phase sur le diagramme.</p>

Fonction	Définition	Exemples d'utilisation
<b>nyquist(G)</b>	Calcule et affiche le diagramme de nyquist d'un système linéaire $G$	<p>▷ <code>G = tf([1],[1 3]);</code>  <code>nyquist(G);</code></p> <p>Cette commande permet de calculer et d'afficher le diagramme de nyquist du système linéaire <math>G(p) = \frac{1}{1+3p}</math>.</p>
<b>step(G)</b>	Affiche la réponse à un échelon d'un système linéaire	<p>▷ <code>G = tf([1],[1 3]); step(G);</code></p> <p>Cet exemple permet d'afficher la réponse indicielle du système linéaire <math>G(p) = \frac{1}{1+3p}</math>.</p>
<b>[Z,P,K,TS] = zpkdata(G,'v')</b>	retourne une décomposition du système $G$ , sous la forme de trois vecteurs contenant les poles les zéros et le gain statique du système	<p>▷ <code>G = tf([2 -2],[1 3]);</code>  <code>[Z,P,K] = zpkdata(G,'v');</code></p> <p>Cet exemple retourne 2 dans <math>K</math>, 1 dans <math>Z</math> et <math>-1/3</math> dans <math>P</math>.</p>
<b>G = zpk(Z,P,K)</b>	construit un système linéaire à partir d'une liste de pôles, de racines et du gain statique su système. En ajoutant la période d'échantillonnage comme quatrième argument, le système crée sera échantillonné	<p>▷ <code>G = zpk();</code> construit le système continu</p> <p>▷ <code>Gz = zpk(,Te);</code> construit le système échantillonné</p> <p>Cet exemple retourne 2 dans <math>K</math>, 1 dans <math>Z</math> et <math>-1/3</math> dans <math>P</math>.</p>